

## 2.4 原子核の描像と質量公式

- 目標：原子核の持つ特徴的な性質を反映する2つの描像（液滴模型、フェルミガス模型）を紹介し、系統的に質量を説明する質量公式を導入する

### 2.4.1 液滴模型

- 水などの非圧縮性流体：構成要素が**強く相関**している
- 原子核を**液滴** (liquid drop) として記述
- 液滴は大きさによらず密度が一定  $\Rightarrow$  密度の飽和性
- **表面張力**：表面付近の粒子は、内部の粒子に比べて周りの粒子の数が少なく結合エネルギーが小さい（図7左）  
 $\Rightarrow$  表面を小さくする方がエネルギー的に得  
（2.4.3節の質量公式の表面エネルギー項の起源）
- 集団運動、原子核の変形などを考える基礎

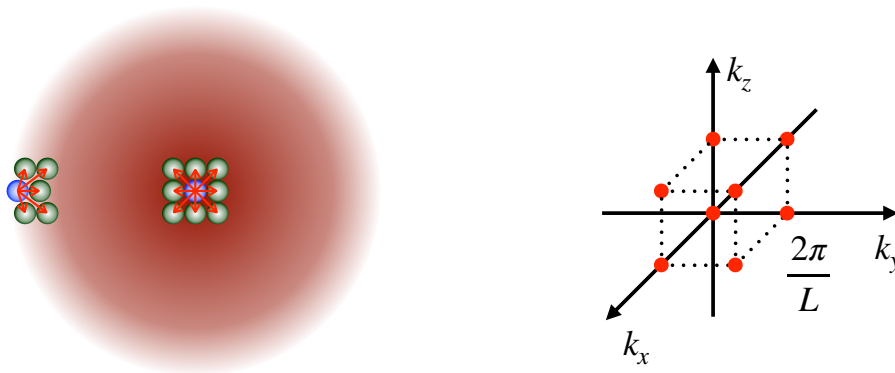


図 7: 左：液滴模型と表面張力。右：フェルミガス模型の離散的運動量  $k_n$ 。

### 2.4.2 フェルミガス模型

- 金属中の自由電子：**相関の弱い**自由なフェルミ粒子の多体系
- 原子核を（ほぼ自由な）核子たちが平均一体ポテンシャルの中に閉じ込められた状態として記述  
核子同士が複雑に結合し合う実際の原子核に対するこの描像（独立粒子描像）の妥当性は後に議論
- 核子はスピン  $1/2$  のフェルミ粒子：**パウリの排他原理**で同じ状態（スピン、運動量）を取れない  
（2.4.3節の質量公式の対称エネルギー項の起源）
- 相互作用しないスピン  $1/2$ 、質量  $m$  のフェルミ粒子が一片  $L$  の立方体に密度  $\rho$  で分布している場合
  - 運動量が**フェルミ運動量**  $k_F$  以下の電子が占有される（温度はゼロとする）

- 平面波の波動関数  $\psi_\sigma(\mathbf{r}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$  はスピン自由度) に周期境界条件  $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \psi_\sigma(x+L, y, z) = \psi_\sigma(x, y+L, z) = \psi_\sigma(x, y, z+L)$  を課すと、運動量は離散化され (図7右)

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (25)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3 \quad (26)$$

- 密度  $\rho$  は体積  $V = L^3$  あたりの粒子数  $N$  なので

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{|\mathbf{k}_n| \leq k_F} 1 \quad (27)$$

粒子数  $N$  が十分大きい場合、和を積分に置き換えられる

$$\sum_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{k}_n| \leq k_F} \rightarrow \int \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3k \Theta(k_F - |\mathbf{k}|), \quad (28)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (29)$$

- フェルミ運動量  $k_F$  とフェルミエネルギー  $E_F$

$$k_F = (3\pi^2)^{1/3} \rho^{1/3}, \quad (30)$$

$$E_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m} \rho^{2/3} \quad (31)$$

- 粒子数  $N$  の系の全運動エネルギー  $K$

$$K = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{|\mathbf{k}_n| \leq k_F} \frac{\mathbf{k}_n^2}{2m} = \frac{3}{5} N E_F \quad (32)$$

## 問題 2.6

- 1) 式 (25) の運動量を持つ平面波が周期境界条件を満たすことを確認せよ。
- 2) 式 (27)、(28) および  $E_F = k_F^2/(2m)$  を用いて式 (30) および (31) を導出せよ。
- 3) 式 (32) 中辺を計算し、最右辺を導出せよ。

- 原子核の場合：陽子が  $Z$  個、中性子が  $N$  個  
陽子、中性子それぞれの密度  $\rho^i$ 、フェルミ運動量  $k_F^i$ 、フェルミエネルギー  $E_F^i$  ( $i = n, p$ )  
 $\rho^p = Z/V$ 、 $\rho^n = N/V$

- 対称核 ( $Z = N = A/2$ ) の場合、核子のフェルミ運動量  $k_F \equiv k_F^p = k_F^n$  は

$$k_F = (3\pi^2 \rho^p)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{A/2}{V}\right)^{1/3} \quad (33)$$

2.3.3 節の議論より、体積を  $V = 4\pi r_0^3 A/3$  ( $r_0 \sim 1.1$  fm) とすれば

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{A}{2 \cdot 4\pi r_0^3 A/3}\right)^{1/3} \sim \frac{1.52}{r_0} \text{ fm}^{-1} \sim 273 \text{ MeV} \quad (34)$$

- 系の全運動エネルギー ( $C$  は定数、後の計算で使用)

$$K = \frac{3}{5} Z E_F^p + \frac{3}{5} N E_F^n = \frac{C}{A^{2/3}} (Z^{5/3} + N^{5/3}) \quad (V \propto A \text{ のとき}) \quad (35)$$

### 2.4.3 質量公式

- **Weizsäcker-Bethe の質量公式** (1935-1936)

式 (10) の結合エネルギーを半経験的 (≈ 微視的な導出ではない) に与える  $A, Z$  の関数

$$M(A, Z) = Zm_H + (A - Z)m_n \underbrace{-a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{=-B} - \delta(A, Z) \quad (36)$$

係数  $a_V$ 、 $a_S$ 、 $a_C$ 、 $a_A$  は全て正で、例えば表 2 の値を使うと図 8 のようにデータを再現する

表 2: 質量公式のパラメーター。数値は Aage Bohr and Ben R. Mottelson, *Nuclear Structure Volume 1* (Addison-Wesley), p.169 (2-91) 式から換算。

$a_V$ [MeV]	$a_S$ [MeV]	$a_C$ [MeV]	$a_A$ [MeV]
15.56	17.23	0.697	93.14

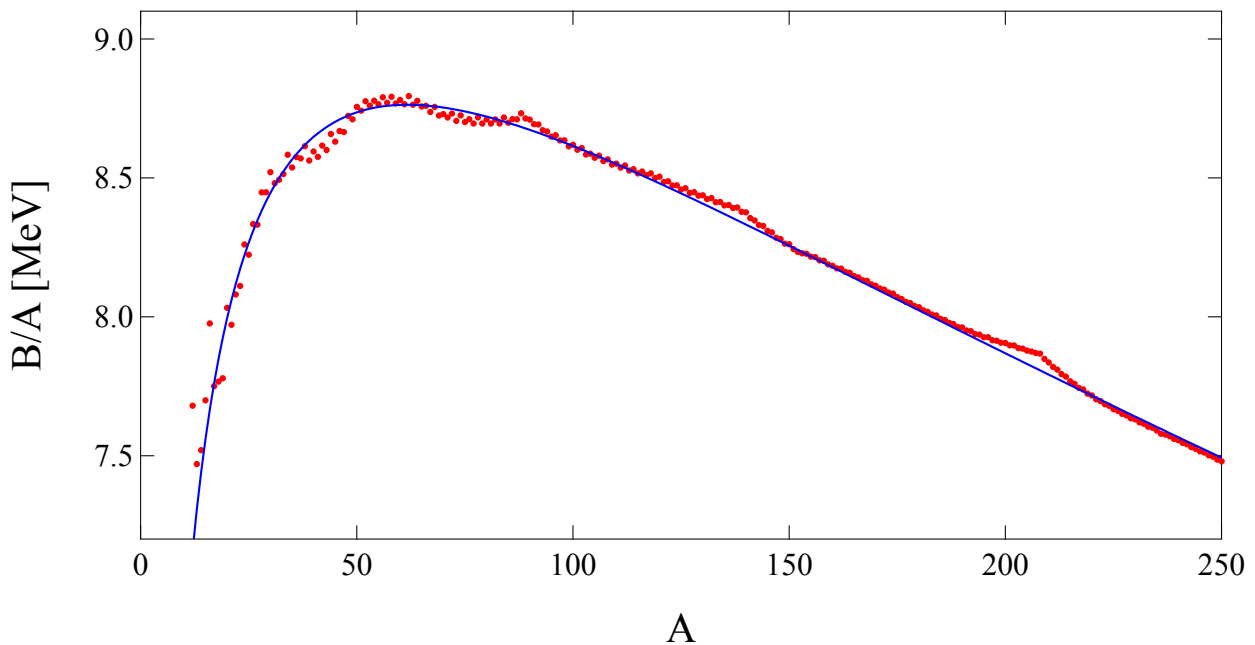


図 8: 質量公式と平均結合エネルギーの比較。曲線は表 2 を用いた質量公式 ( $Z$  は (39) 式で計算)。実験データは M. Wang, *et al.*, *Chin. Phys. C* **45**, 030003 (2021) による。

● 結合エネルギー  $B$  を与える項の物理的起源

- **体積エネルギー** ( $-a_V A$ ) : 核子間引力による結合エネルギー  
 結合エネルギーの飽和性 ( $B/A \sim \text{定数}$ ) を与える項  
 核力が短距離力  $\Rightarrow$  核子は周辺の核子とのみ結合  $\Rightarrow B \propto A$   
 (全ての核子と結合するなら  $B \propto A(A-1)/2$ )  
 半径  $\propto A^{1/3} \Rightarrow$  体積  $\propto A$ 、つまり体積に比例した結合エネルギー  
 係数  $a_V$  が  $\sim 8 \text{ MeV}$  より大きいのは、残りの項が斥力の ( $B$  を下げる) 寄与をするため
- **表面エネルギー** ( $+a_S A^{2/3}$ ) : 液滴の表面張力に対応したエネルギー  
 表面積  $\propto$  半径の 2 乗  $\propto A^{2/3}$   
 表面付近の核子は内部に比べてまわりの核子の数が少ない  
 $\Rightarrow$  表面が大きい方が結合エネルギーが小さい  
 $\Rightarrow$  符号は  $B$  に対して負
- **クーロンエネルギー** ( $+a_C Z^2/A^{1/3}$ ) : 陽子間のクーロン力によるエネルギー  
 斥力  $\Rightarrow$  符号は  $B$  に対して負  
 一様帯電球のクーロンエネルギーは電荷の 2 乗に比例、半径に反比例  
 $\Rightarrow Z^2$  に比例、 $A^{1/3}$  に反比例  
 電磁相互作用なので係数  $a_C$  が他の項 (強い相互作用) に比べて小さい
- **対称エネルギー** ( $+a_A (A/2 - Z)^2/A$ ) : フェルミ粒子の性質から  $Z$  と  $N$  を揃えようとする項  
 $Z = N = A/2$  のとき 0 で、ズレが大きいほど斥力  
 同じ種類のフェルミ粒子が多くなるとフェルミ面が高くなる  
 $\Rightarrow$  粒子を追加するのに高いエネルギーが必要  
 非対称度  $\eta = (N - Z)/2$  を導入し式 (35) で非対称性による運動エネルギーの増加を見積もると

$$K(A, Z) - K(A, A/2) = \frac{20C}{2^{2/3}9} \frac{+(A/2 - Z)^2}{A} + \mathcal{O}((\eta/A)^4) \quad (37)$$

運動エネルギーが増えると束縛エネルギーが減るので、質量公式に斥力的に働く

- **対エネルギー** ( $-\delta(A, Z)$ ) : 核子間の対相関の相互作用エネルギー  
 具体形は模型によって異なるが、例えば  $a_P = 33.5 \text{ MeV}$  として

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} a_P A^{-3/4} & Z, N \text{ ともに偶数} \\ 0 & Z, N \text{ の一方が偶数、一方が奇数} \\ -a_P A^{-3/4} & Z, N \text{ ともに奇数} \end{cases} \quad (38)$$

核力によって、陽子同士、または中性子同士が 2 つずつ対になると結合して安定化  
 $\Rightarrow$  偶数なら安定 (結合エネルギーが増える)、奇数なら不安定 (結合エネルギーが減る)

- 質量公式は 2.2 節の結合エネルギーの性質の大部分を説明するが、性質 4 ( $B/A$  の局所的な増大) は表現できない  $\leftarrow$  殻模型と魔法数が必要 (後の節で議論)

**問題 2.7**

- 1) 体積を  $V = 4\pi r_0^3 A/3$  として式 (35) の係数  $C$  を質量  $m$  と  $r_0$  で表し、 $r_0 = 1.10$  fm の場合の数値を MeV 単位で評価せよ。ただし核子質量は陽子も中性子も  $m = 940$  MeV、 $\hbar c = 197$  MeV fm とする。
- 2) 式 (35) で  $N = A - Z$  として、 $A$  を固定した時に  $Z = A/2$  が最も全運動エネルギーが小さいことを示せ。
- 3)  $\eta/A \ll 1$  として式 (37) を導出せよ。
- 4) 1) の結果を使ってフェルミガス模型による  $a_A$  の値を計算せよ。

- 質量公式の応用： $Z/N$  比の  $A$  依存性の理解
- 対称エネルギーは  $Z$  を  $A/2$  に近づけようとするが、クーロンエネルギーは  $Z$  を減らそうとする両者の競合で、 $A$  を固定した場合の  $Z/N$  比が決定される
- 安定な  $Z$  の値 (図 9)：

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{2a_C}{a_A} A^{2/3}} \tag{39}$$

$a_C \ll a_A$  より、 $A$  が小さければ  $Z \sim A/2$ 、つまり  $Z \sim N$  (対称エネルギー)  
 $A$  が大きくなると分母が 2 より大きくなるので  $Z < A/2$ 、つまり  $Z < N$  (クーロンエネルギー)

- 核図表上に質量をプロットすると式 (39) に沿って谷があらわれる (ハイゼンベルクの谷)

**問題 2.8\***

安定点は  $M(A, Z)$  を  $Z$  で微分して 0 になる点で与えられる。対相関を無視し ( $\delta(A, Z) = 0$ )、 $m_H - m_n \sim 0$  と近似して式 (39) を導出せよ。

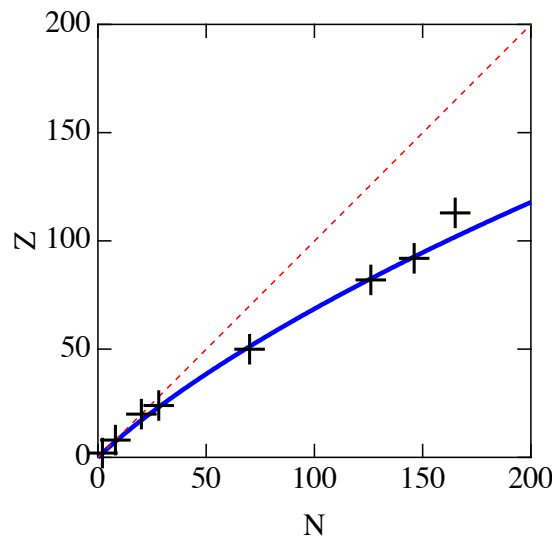


図 9: 式 (39) を満たす  $(N, Z)$  の関係 (実線)。破線は  $N = Z$  を表す。十字記号は問題 2.1 の核種の  $(N, Z)$  であり、U、Nh 以外は安定核である。