

## 2 原子核の基本的性質

### 2.1 原子核の構成要素と表記法

- 原子核 (nucleus、複数形は nuclei) : **陽子** (proton) と **中性子** (neutron) からなる **自己束縛系**
- 核子 (nucleon) : 陽子と中性子の総称  
電磁氣的性質以外はほぼ同じ (⇒ アイソスピンの導入)

表 1: 核子の性質。質量のデータは Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov>) による。() 内の数字は最後の桁の誤差を表す (陽子質量は  $938.2720813 \pm 0.0000058$  MeV)。

	質量 [MeV]	電荷 [e]	スピン・パリティ $J^P$
陽子	938.2720813(58)	+1	$1/2^+$
中性子	939.5654133(58)	0	$1/2^+$

- **核種** (nuclide) : 原子核の種類  
陽子数  $Z$ 、中性子数  $N$ 、質量数  $A = Z + N$  のうち 2 つを指定すると決まる  
質量数  $A$  を左上に添えた元素名  $X = \{H, He, Li, Be, \dots\}$  (陽子数  $Z$  を指定) を用いて

$${}^A X \tag{8}$$

と表記 (陽子数、中性子数を明記したいときは  ${}^A_Z X_N$  と表記)

例)  ${}^{12}\text{C}$  : 質量数  $A = 12$  の炭素 (陽子数  $Z = 6$ )、よって中性子数は  $N = 6$ 、詳しく書くと  ${}^{12}_6\text{C}_6$

- **核図表** : 横軸を  $N$ 、縦軸を  $Z$  として核種を表にしたもの (図 3)

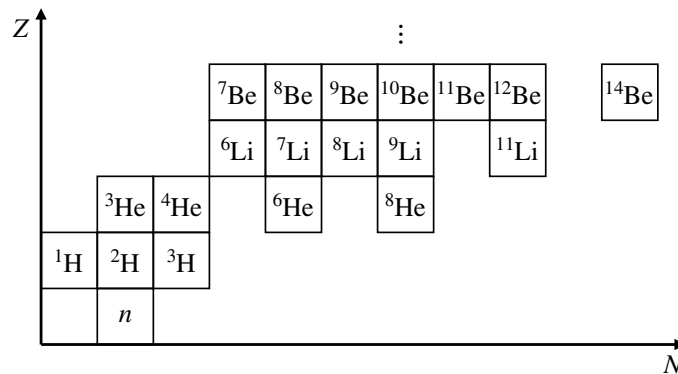


図 3: 核図表。

- 同位体 (isotope) :  $Z$  が同じ核、核図表で横に並ぶ  
例)  ${}^{10}\text{Be}$ ,  ${}^{11}\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{Be}$
- 同中性子体 (isotone) :  $N$  が同じ核、核図表で縦に並ぶ  
例)  ${}^{10}\text{Be}$ ,  ${}^9\text{Li}$ ,  ${}^8\text{He}$
- 同重体 (isobar) :  $A$  が同じ核、核図表で斜め 45 度に並ぶ  
例)  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Li}$ ,  ${}^8\text{He}$

- 鏡映核 (mirror nuclei) : 同重体のうち、 $Z$  と  $N$  が入れ替わったもの  
例)  ${}^7\text{Be}$  ( $Z = 4, N = 3$ ) と  ${}^7\text{Li}$  ( $Z = 3, N = 4$ )

### 問題 2.1\*

以下の核種について、陽子数  $Z$ 、中性子数  $N$  を調べ、 $Z/N$  比を計算せよ。(Nh をのぞいて) 質量数  $A$  が大きくなるにつれて、 $Z/N$  比にどのような傾向があるか述べよ。

${}^4\text{He}$ 、 ${}^{16}\text{O}$ 、 ${}^{40}\text{Ca}$ 、 ${}^{52}\text{Cr}$ 、 ${}^{120}\text{Sn}$ 、 ${}^{208}\text{Pb}$ 、 ${}^{238}\text{U}$ 、 ${}^{278}\text{Nh}$

## 2.2 原子核の質量

- 原子核は核子の自己束縛系：原子核の質量は、束縛していない核子の質量の和より小さい  
例)  ${}^{12}\text{C}$  の質量は陽子 6 個 + 中性子 6 個の質量より小さい
- **結合エネルギー** (binding energy) : 原子核を核子の集合に分解するのに必要なエネルギー、 $B(A, Z) > 0$   
質量欠損 (mass defect)、**束縛エネルギー**とも呼ぶ
- 質量数  $A$ 、陽子数  $Z$  の原子核の質量  $m(A, Z)$  は陽子質量を  $m_p$ 、中性子質量を  $m_n$  として (図 4)

$$m(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(A, Z) \quad (9)$$

- 原子 (原子核 + 電子の束縛系) の質量に比べて、電子の結合エネルギーは無視できるくらい小さい (問題 2.2 参照)

電子の結合エネルギーを無視すると、原子質量  $M(A, Z)$  は水素原子質量  $m_H$  を用いて

$$M(A, Z) = Zm_H + (A - Z)m_n - B(A, Z) \quad (10)$$

- 統一原子質量単位 :  ${}^{12}\text{C}$  原子の質量を 12 で割ったもの  
Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov>) による値は

$$1 \text{ u} = 931.4940954(57) \text{ MeV} \quad (11)$$

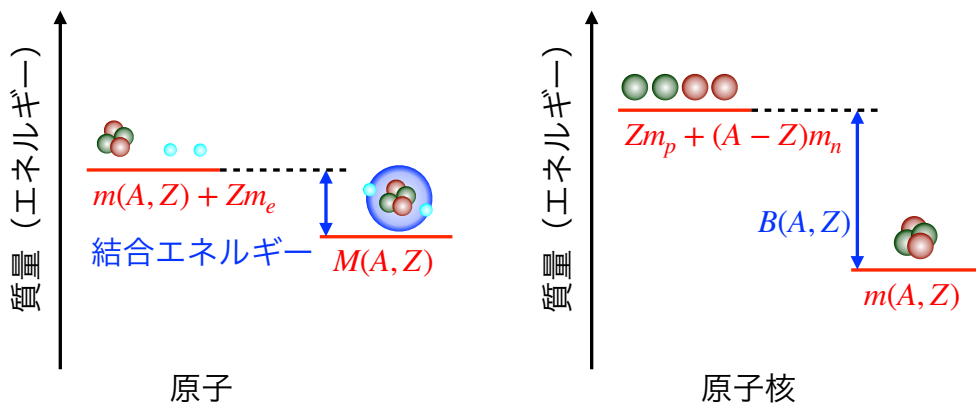


図 4: 原子と原子核の結合エネルギーの模式図。

## 問題 2.2

以下の問いに答えよ。ただし  $m_p = 1.007276 \text{ u}$ 、 $m_n = 1.008665 \text{ u}$ 、 $m_e = 0.0005486 \text{ u}$ 、 $m_H = 1.007825 \text{ u}$ 、 $1 \text{ eV}/c^2 = 1.78 \times 10^{-36} \text{ kg}$  とする。数値は有効数字 3 桁で表記せよ。

- 1) 水素原子中の電子の結合エネルギーを  $B_H = 13.6 \text{ eV}$  とする。 $B_H/m_H$  を計算し、水素原子質量に対して電子の結合エネルギーを無視する近似の誤差のオーダー ( $10^n$  になるか) を求めよ。
- 2)  $^{12}\text{C}$  原子 1 個の質量を MeV および g 単位で表せ。
- 3)  $^{12}\text{C}$  原子核の結合エネルギーを式 (10) を使って統一原子質量単位で表し、結合エネルギーは原子質量の何% に対応するか計算せよ。
- 4)  $^{12}\text{C}$  原子核の結合エネルギーを MeV 単位で表せ。

- 結合エネルギー  $B$  は質量数  $A$  が増えるにつれ増加する
- **平均結合エネルギー**  $B/A$  : 1 核子あたりの結合エネルギー  
図 5 : 質量数  $A$  ごとに最も結合エネルギーが大きい原子核の  $B/A$
- 性質 1 : 軽い核 ( $A < 20$ ) では  $B/A$  は  $A$  と共に増加する
- 性質 2 : 重い核 ( $A > 20$ ) では  $B/A$  は **約 8 MeV** で一定  
 $A$  に依存しない (結合エネルギーの **飽和性**)
- 性質 3 :  $A \sim 60$  付近が最も結合エネルギーが高い  
つまり核子が最も強く結合するのは  $A \sim 60$  付近
- 性質 4 : 局所的に  $B/A$  が大きくなる  $A$  がある ( $^4\text{He}$ 、 $^{16}\text{O}$  など)  
結合が大きい = 安定性が高い  $\Rightarrow$  **魔法数** (magic number) の存在

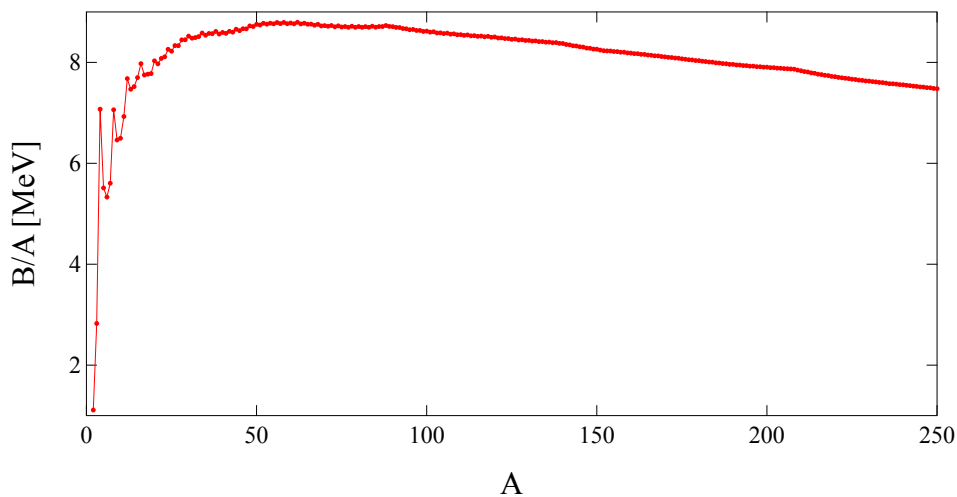


図 5: 質量数  $A$  の原子核の最大の平均結合エネルギー  $B/A$ 。データは M. Wang, *et al.*, *Chin. Phys. C* **45**, 030003 (2021) による。

## 2.3 原子核の大きさ

### 2.3.1 ラザフォード散乱 (量子論)

- 基本的な設定は 1.6 節と同じで点状の (大きさを持たない) 標的原子核  
量子力学による散乱理論は J.J.Sakurai 著「現代の量子力学 (下)」(吉岡書店)などを参照  
ただしここでは散乱波動関数が  $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$  に比例するように規格化している
- $\alpha$  の入射運動量を  $\mathbf{p}$ 、散乱後の運動量を  $\mathbf{p}'$ 、散乱角  $\theta$  は  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  の間の角度
- エネルギー保存より散乱前後の運動量の大きさは同じなので  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \equiv p$  と定義  
エネルギーは  $E = p^2/(2m)$
- 散乱の波動関数: 入射波と外向き球面波の重ね合わせ

$$\psi(\mathbf{r}) = \underbrace{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}_{\text{入射波}} + f(p, \theta) \underbrace{\frac{e^{ipr}}{r}}_{\text{散乱後の外向きの波}} \quad (12)$$

- **散乱振幅** (scattering amplitude)  $f(p, \theta)$ : 散乱による球対称な外向波からのずれ  
運動量の大きさ  $p$  と散乱角  $\theta$  に依存する
- 散乱断面積と散乱振幅の関係:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(p, \theta)|^2 \quad (13)$$

- ボルン近似: ポテンシャル  $V$  が小さい (多重散乱を無視する) 場合に、散乱振幅は

$$f_{\text{Born}}(p, \theta) = -\frac{2m}{4\pi} \int d^3r V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (14)$$

ここで  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  は運動量移行

- クーロン散乱  $V_c = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$  の場合

$$f_{\text{Born},c}(p, \theta) = -\frac{ZZ'e^2}{(4\pi\epsilon_0)4E \sin^2(\theta/2)} \quad (15)$$

となり、古典論のラザフォード散乱の結果 (7) を再現する

---

### 問題 2.3

以下の手順で式 (15) の導出を確認せよ。

- 1) 運動量移行の 2 乗  $q^2$  を  $p$  と散乱角  $\theta$  で表せ。
- 2) 湯川ポテンシャル  $V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$  ( $\mu > 0$ ) を式 (14) に代入し散乱振幅  $f_{\text{Born}}$  を求めよ。
- 3) 2) の結果で  $V_0/\mu = (ZZ'e^2)/(4\pi\epsilon_0)$  を固定しながら  $\mu \rightarrow 0$  として式 (15) を導出し、散乱断面積が式 (7) になることを確認せよ。

---

注)  $V_c = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$  を式 (14) に直接代入するとうまく計算できないのは、 $V_c$  が長距離力であり、散乱波が遠方で平面波になるという仮定 (12) が成立しないため。遮蔽 (正則化) しておいてそれを外す極限をとる手続きは、解析接続や発散級数の総和法などで広く使われている。

### 2.3.2 原子核の空間的広がり と 形状因子

- 入射粒子の運動量を上げると位置の分解能が上がり、標的原子核の空間的広がりを調べられる
- 標的原子核の密度分布  $\rho(\mathbf{r})$ 、規格化は  $\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = 1$
- この場合のクーロンポテンシャルは

$$V_\rho(\mathbf{r}) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (16)$$

- ボルン近似での散乱振幅は、点電荷の場合のラザフォード散乱の結果  $f_{\text{Born,c}}(p, \theta)$  を用いて

$$f_{\text{Born},\rho}(p, \theta) = f_{\text{Born,c}}(p, \theta) F(\mathbf{q}) \quad (17)$$

**形状因子** (form factor) : 密度分布のフーリエ変換

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (18)$$

- 散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{点電荷}}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (19)$$

$q^2$  が運動量  $p$  と散乱角  $\theta$  に依存するので、空間的広がりがある場合  $|F(\mathbf{q})|^2$  によって断面積の運動量、角度依存性が変化する

### 問題 2.4

- $\mathbf{r}'$  の位置にある微小領域  $d^3r'$  の電荷が  $dQ = Z'e\rho(\mathbf{r}')d^3r'$  であることを用い、位置  $\mathbf{r}$  に電荷  $Ze$  を置いた場合のクーロンポテンシャル (図 6 左) を  $\mathbf{r}'$  全体で積分することで式 (16) を導け。
- 式 (16) をボルン近似の公式 (14) に代入し、積分変数を変換することで式 (17) と式 (18) を導け。

- 密度分布  $\rho(\mathbf{r})$  を仮定すれば、 $F(\mathbf{q})$  を通じて散乱断面積の角度依存性が計算できる
- 球対称 (原点からの距離  $r = |\mathbf{r}|$  のみに依存) な場合の分布の例 (図 6 右)

– (A) : 一様分布

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R_A \\ 0 & r > R_A \end{cases} \quad (20)$$

密度の規格化から、 $\rho_0 = 3/(4\pi R_A^3)$  なので、半径  $R_A$  のみがパラメーター

– (B) : **Woods-Saxon 分布**

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_B}{a}\right)} \quad (21)$$

$R_B$  は分布関数の値が中心 ( $r = 0$ ) での値の半分になる距離  $\sim$  半径

$a$  は核表面のぼやけ度 (diffuseness parameter)、 $a \rightarrow 0$  の極限で  $R_A = R_B$  の一様分布に帰着

密度の規格化から  $R_B$  と  $a$  を決めれば  $\rho_0$  が決まる

フェルミ分布関数との類似 :  $r \sim E$ 、 $a \sim k_B T$ 、 $R_B \sim \mu$

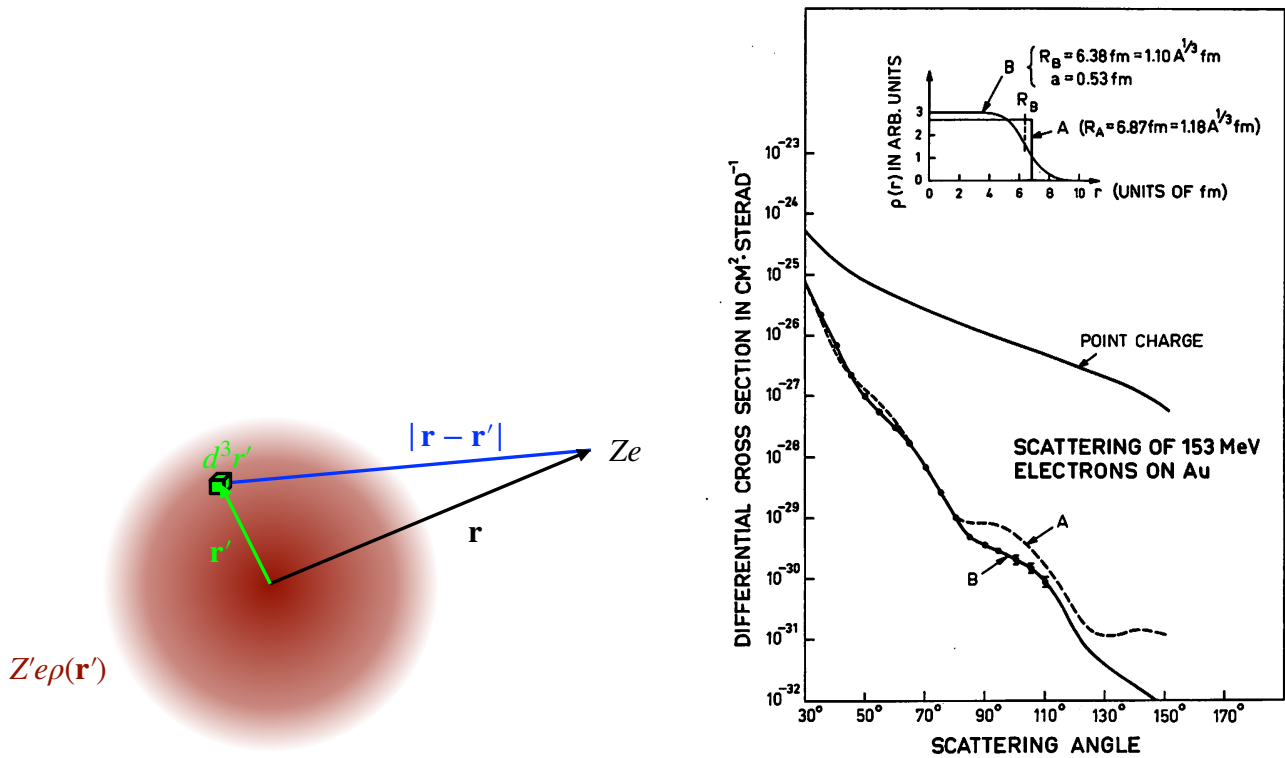


図 6: 左：原子核の密度分布の模式図。右：散乱断面積の角度依存性、一様分布と Woods-Saxon 分布、Aage Bohr and Ben R. Mottelson, *Nuclear Structure* Volume 1 (Addison-Wesley), p.159 図 2-1 から引用。

- $\alpha$  線 ( ${}^4\text{He}$  原子核) での散乱は電磁相互作用、強い相互作用両方を含んでいる  
電子散乱：電磁相互作用のみで電荷分布を調べる  
中性子散乱：強い相互作用のみで核子密度分布を調べる
- 図 6 右： ${}^{197}\text{Au}$  の電子散乱の実験データ  
点電荷では角度依存性を説明できず、広がりが必要  
Woods-Saxon 分布で実験データがよく再現される  
得られたパラメーターは  $R_B = 6.38 \text{ fm}$ 、 $a = 0.53 \text{ fm}$ ：原子核の**大きさ**
- 第 0 近似で核子密度分布～電荷分布（ただし例外もある）

### 問題 2.5

- 1) 形状因子の  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  の値  $F(\mathbf{0})$  を計算せよ。
- 2) 一様分布 (20) の場合の形状因子  $F(\mathbf{q})$  を求めよ ( $\mathbf{q}$  の大きさ  $q = |\mathbf{q}|$  のみに依存する)。
- 3)  $q \rightarrow 0$  の極限で 1) の結果を再現することを確認せよ。

### 2.3.3 密度の飽和性

- 原子核散乱データで Woods-Saxon 分布のパラメーターを決めると、様々な核種に対し以下が成立
  - $R_B$  は質量数の  $A^{1/3}$  に比例

$$R_B = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \sim 1.1 \text{ fm} \quad (22)$$

– ぼやけ度： $A$  に依存せず  $a \sim 0.6$  fm

- ぼやけ度  $a \rightarrow 0$  と近似して、質量数  $A$ 、半径  $R_B$  の球形の原子核の密度を考える

原子核の体積： $V = 4\pi R_B^3/3$

平均核子密度（単位体積あたりの核子の数） $\langle\rho\rangle$  は

$$\langle\rho\rangle = \frac{A}{V} = \frac{3A}{4\pi R_B^3} \quad (23)$$

半径が式 (22) に従うとき、密度は  $A$  に依存しない：**密度の飽和性**

$$\langle\rho\rangle = \frac{3}{4\pi r_0^3} \sim 0.17 \text{ 個/fm}^3 \quad (24)$$

これを飽和密度（saturation density）または**標準核密度**（normal nuclear density）と呼ぶ

- 平均核子間距離： $d = \langle\rho\rangle^{-1/3} \sim 1.8$  fm  
核子間の距離は核子の大きさ（ $\sim 1$  fm）の約 2 倍  
原子核は核子が密に詰まった系である