

## 13 カイラル対称性の自発的破れ

### 13.1 導入

- 陽子  $p$  の質量はクォークの質量の和 ( $uud$ ) より非常に大きい?

$$M_p \sim 939 \text{ MeV}, \quad 2m_u + m_d \sim 10 \text{ MeV} \quad (323)$$

- QCD での理解：グルーオンやクォーク反クォーク対の生成、消滅が無限に存在 (図 42)  
⇒ 陽子は  $qqq$  に  $g$  や  $q\bar{q}$  が追加された成分を含む

$$|p\rangle = c_1 |uud\rangle + c_2 |uudg\rangle + c_3 |uudu\bar{u}\rangle + \dots \quad (324)$$

実際に格子 QCD シミュレーション (時間、空間を離散化し経路積分を数値計算で評価する方法) によって陽子の質量が再現されている

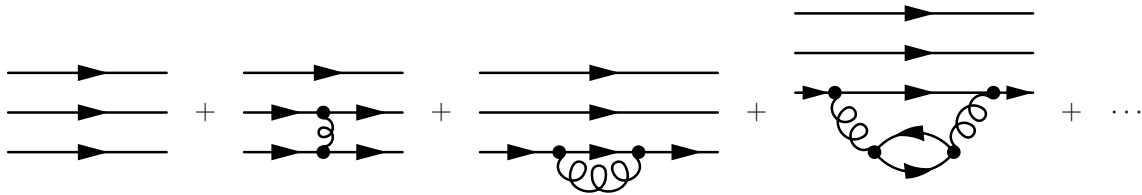


図 42: バリオン質量に寄与する QCD のファインマン図。第 2 項：クォーク間の相互作用、第 3 項と第 4 項：クォークの自己エネルギー。

### 13.2 対称性の自発的破れ

- 対称性：ハミルトニアンを不変に保つ変換 (8.1 節参照)  
例) 磁性体 (格子点上のスピンの系、 $i, j$  は格子点の座標、 $\langle i, j \rangle$  は最近接のペアのみの和)

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = -J \sum_{\langle i, j \rangle} (s_{x,i} s_{x,j} + s_{y,i} s_{y,j} + s_{z,i} s_{z,j}) \quad (325)$$

回転変換は内積を保存するので  $H$  は不変 (特定の方向がない)： $H$  は 3 次元回転対称性  $SO(3)$  を持つ

- 明白な破れ (explicit breaking)：ハミルトニアンに対称性を破る項がある場合  
例) 外部一様磁場  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 、 $\mu$  は磁気モーメント

$$H_{\text{SB}} = -\mu B \sum_i s_{z,i} \quad (326)$$

磁場をかける方向 ( $z$  軸) が特定されるので、 $H_{\text{SB}}$  は  $SO(3)$  を破る

$$[H + H_{\text{SB}}, S_x] = [H_{\text{SB}}, S_x] \neq 0 \quad (327)$$

- 自発的破れ** (spontaneous breaking)：ハミルトニアンの対称性を固有状態 (真空) が持たない場合  
例) ハミルトニアン (325) は、隣接するスピンの向きでエネルギーが異なる：スピン 1/2 の場合

$$\langle \uparrow\uparrow | H | \uparrow\uparrow \rangle = -\frac{J}{4}, \quad \langle \uparrow\downarrow | H | \uparrow\downarrow \rangle = +\frac{J}{4} \quad (328)$$

なので  $J > 0$  なら同じ向きに揃えた方がエネルギーが低い



図 43: スピン系の状態の模式図。左：高温でスピンの向きがランダム（回転対称性あり）。右：低温でスピンの向きが揃う（回転対称性がない）

温度  $T$  の基底状態  $|\Omega\rangle$ : 自由エネルギー  $F$  を最小にする状態

$$F = E - TS, \quad E = \langle H \rangle \quad (329)$$

高温 ( $T$  大): 熱ゆらぎにより各スピランダムな方向を向く (エントロピー  $S$  を大きくする)

低温 ( $T$  小): 内部エネルギー  $E$  を小さくするために全てのスピンの向きが揃う (強磁性相転移)

スピラン特定の方向に揃うと、基底状態は 3 次元回転対称性を持たない: 自発的対称性の破れ

- **秩序変数** (order parameter): 対称性の自発的破れを特徴づける期待値

例) 磁化  $M$ : 全てのスピンの  $z$  成分の期待値の和、スピラン揃った方向を  $z$  軸にとる

$$M = \langle \Omega | \sum_i s_{z,i} | \Omega \rangle \quad (330)$$

高温: ランダムな方向を向く各スピンの期待値が平均され  $M = 0$

低温: 各スピラン特定の方向に揃っているので  $M \neq 0$

$\Rightarrow M \neq 0$  ならば対称性が自発的に破れている

(演算子  $\sum_i s_{z,i}$  が対称性を破るので  $|\Omega\rangle$  が対称性を持つなら  $M = 0$ )

- 一般に自発的破れは全ての対称性を破らず、部分的に対称性が残る場合がある

例) 3 次元回転対称性は  $x, y, z$  軸まわりの回転の 3 種類 (生成子  $S_x, S_y, S_z$ )

揃ったスピンの向きを  $z$  方向とすると、

$$S_x, S_y: \text{破れる対称性} \quad (331)$$

$$S_z: \text{破れずに残る対称性 (z 軸まわりの回転)} \quad (332)$$

- 南部ゴールドストーンの定理 (南部にノーベル賞、2008 年)

連続的対称性が自発的に破れると、無質量の**南部ゴールドストーンボソン** (NG ボソン) があらわれる  
破れた対称性の生成子の数を  $n_{\text{BS}}$  とすると、

– 相対論的な系

Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961).

J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).

J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).

$$n_{\text{NG}} = n_{\text{BS}} \quad (333)$$

$n_{\text{NG}}$ : NG ボソンの数

– 非相対論的な系

H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **108**, 251602 (2012)

Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110**, 091601 (2013)

$$n_{\text{I}} + 2n_{\text{II}} = n_{\text{BS}} \quad (334)$$

$n_{\text{I}}$  : 線形分散 (Type I) NG モードの数

$n_{\text{II}}$  : 2乗分散 (Type II) NG モードの数

$$E(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| + \dots \quad (\text{Type I}), \quad (335)$$

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \dots \quad (\text{Type II}) \quad (336)$$

例) 磁性体の場合  $n_{\text{BS}} = 2$

NG モードはマグノン (スピン波を量子化したもの)

強磁性体 (式 (325) で  $J > 0$ ) :  $n_{\text{I}} = 0$ ,  $n_{\text{II}} = 1$  (type II マグノン 1つ)

反強磁性体 (式 (325) で  $J < 0$ ) :  $n_{\text{I}} = 2$ ,  $n_{\text{II}} = 0$  (type I マグノン 2つ)

### 13.3 カイラル対称性

- クォーク場の右巻き成分  $q_R$  と左巻き成分  $q_L$  への分解

$$q_R = P_R q, \quad q_L = P_L q \quad (337)$$

右巻き : 運動量とスピンの向きが同じ方向、左巻き : 運動量とスピンの向きが反対向き

- 射影演算子  $P_R, P_L$

$$P_R + P_L = 1, \quad P_R P_L = 0, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L \quad (338)$$

具体形は以下の通り、 $\gamma_5^2 = 1$  を用いて上の性質が示される

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (339)$$

カイラリティ ( $\gamma_5$  の固有値  $\pm 1$ ) による射影

- クォーク場の共役

$$\bar{q}_R = \bar{q} P_L, \quad \bar{q}_L = \bar{q} P_R \quad (340)$$

$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$  よりディラック共役  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  の  $\gamma^0$  を飛び越える時に  $P_R \gamma^0 = \gamma^0 P_L$ ,  $P_L \gamma^0 = \gamma^0 P_R$

- ラグランジアン分解

– 運動項 : 右巻きと左巻きが分離

$$\begin{aligned} \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu)q &= \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu)(P_R^2 + P_L^2)q \\ &= \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu)P_R P_R q + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu)P_L P_L q \\ &= \bar{q}P_L(i\gamma^\mu D_\mu)P_R q + \bar{q}P_R(i\gamma^\mu D_\mu)P_L q \quad \leftarrow (P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L, P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R) \\ &= \bar{q}_R(i\gamma^\mu D_\mu)q_R + \bar{q}_L(i\gamma^\mu D_\mu)q_L \end{aligned}$$

- **質量項**：右巻きと左巻きが混ざる

$$\begin{aligned}
-m\bar{q}q &= -m\bar{q}(P_R + P_L)q \\
&= -m\bar{q}(P_R^2 + P_L^2)q \\
&= -m\bar{q}P_R P_R q - m\bar{q}P_L P_L q \\
&= -m\bar{q}_L q_R - m\bar{q}_R q_L
\end{aligned}$$

- **カイラル変換**：右巻きと左巻きを**独立に**ユニタリー変換する（一般に  $U_L \neq U_R$ ）

$$q_L \rightarrow U_L q_L, \quad \bar{q}_L \rightarrow \bar{q}_L U_L^\dagger, \tag{341}$$

$$q_R \rightarrow U_R q_R, \quad \bar{q}_R \rightarrow \bar{q}_R U_R^\dagger \tag{342}$$

$U_L, U_R$  はフレーバー空間の変換で、 $\gamma^\mu$  や  $D_\mu$  とは交換する

- **運動項**：カイラル変換で不変

$$\begin{aligned}
\bar{q}_R(i\gamma^\mu D_\mu)q_R + \bar{q}_L(i\gamma^\mu D_\mu)q_L &\rightarrow \bar{q}_R U_R^\dagger (i\gamma^\mu D_\mu) U_R q_R + \bar{q}_L U_L^\dagger (i\gamma^\mu D_\mu) U_L q_L \\
&= \bar{q}_R(i\gamma^\mu D_\mu)q_R + \bar{q}_L(i\gamma^\mu D_\mu)q_L
\end{aligned}$$

- **質量項**：カイラル変換で**不変でない**

$$\begin{aligned}
-m\bar{q}_L q_R - m\bar{q}_R q_L &\rightarrow -m\bar{q}_L U_L^\dagger U_R q_R - m\bar{q}_R U_R^\dagger U_L q_L \\
&\neq -m\bar{q}_L q_R - m\bar{q}_R q_L
\end{aligned}$$

⇒ クォークの質量が 0 の極限で QCD ラグランジアンはカイラル対称性を持つ

- $u, d$  クォークの質量を無視すると、 $U_R \in \text{SU}(2)_R, U_L \in \text{SU}(2)_L$  で QCD のカイラル対称性は

$$\text{SU}(2)_R \otimes \text{SU}(2)_L \tag{343}$$

$\text{SU}(2)_R$ ：右巻きの  $u$  クォークと  $d$  クォークの混合

$\text{SU}(2)_L$ ：左巻きの  $u$  クォークと  $d$  クォークの混合

- カイラル対称性の生成子の数は、3つの生成子を持つ  $\text{SU}(2)$  が独立に 2つあるので  $3 \times 2 = 6$

$$T_R^1, T_R^2, T_R^3, T_L^1, T_L^2, T_L^3 \tag{344}$$

### 13.4 カイラル対称性の自発的破れ

- 秩序変数：**クォーク凝縮**

$$\langle \bar{q}q \rangle \equiv \langle \Omega | \bar{q}q | \Omega \rangle = \langle \Omega | (\bar{u}u + \bar{d}d) | \Omega \rangle \tag{345}$$

$|\Omega\rangle$ ：真空（QCD の基底状態）

$\bar{q}q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L$  なので、 $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$  であればカイラル対称性が自発的に破れている

- 現実世界では  $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$  であることが格子 QCD 計算や様々な現象論で知られている

- 残る対称性：クォーク凝縮は  $U_R = U_L = U_V$  という特別な変換で不変

$$\begin{aligned}
\bar{q}q &= \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L \\
&\rightarrow \bar{q}_L U_L^\dagger U_R q_R + \bar{q}_R U_R^\dagger U_L q_L \\
&= \bar{q}_L U_V^\dagger U_V q_R + \bar{q}_R U_V^\dagger U_V q_L \quad \leftarrow (U_R = U_L = U_V) \\
&= \bar{q}q
\end{aligned}$$

右巻き、左巻きのクォークを同じ角度で回転する変換、 $U_V \in \text{SU}(2)_V$  と呼ばれるこれはアイソスピン変換に対応（クォーク場のフレーバー空間に対し  $\text{SU}(2)$  変換）

$$q = q_R + q_L \rightarrow U_V q_R + U_V q_L = U_V q \quad (346)$$

- QCD のカイラル対称性の自発的破れは

$$\text{SU}(2)_R \otimes \text{SU}(2)_L \rightarrow \text{SU}(2)_V \quad (347)$$

$\text{SU}(2)_V$  が 3 個の生成子を持つので、破れた対称性の生成子の数は

$$n_{\text{BS}} = 3 \quad (348)$$

- $m_u \neq 0$ 、 $m_d \neq 0$  よりカイラル対称性の明白な破れもある
- カイラル対称性の自発的破れのハドロン物理での帰結

– 構成子クォーク質量の生成

$$M_u = m_u + C \langle \bar{q}q \rangle \quad (349)$$

$m_u$ ：カレントクォーク質量（QCD ラグランジアン of 質量、数 MeV）

$M_u$ ：構成子クォーク質量（対称性の自発的破れによる有効質量  $\sim 300$  MeV）

陽子質量  $M_p$  は  $2M_u + M_d$  と構成子クォーク間の相互作用エネルギー

$\Rightarrow$  ハドロンの質量のほとんどはカイラル対称性の自発的破れによって生成される

– NG ボソン： $\pi$  中間子 ( $n_{\text{NG}} = 3$ )

$$\pi^+, \pi^0, \pi^- \quad (350)$$

他のハドロン ( $M_H \gtrsim 500$  MeV) に比べ、 $m_\pi = 138$  MeV は非常に軽い

$\leftarrow$  無質量 NG ボソンの名残り（有限の質量は  $m_q \neq 0$  という明白な破れに起因）

– 低エネルギー定理：NG ボソンである  $\pi$  中間子とハドロンとの相互作用が対称性の制限を受ける

- 対称性の部分的回復：有限温度 ( $T$ ) や有限密度 ( $\rho$ ) では、クォーク凝縮の値が変化

$$|\langle \Omega_{T,\rho} | \bar{q}q | \Omega_{T,\rho} \rangle| < |\langle \Omega_{0,0} | \bar{q}q | \Omega_{0,0} \rangle| \quad (351)$$

真空 ( $T = 0, \rho = 0$ ) より秩序変数の絶対値が減少し、自発的破れの度合いが小さくなる（部分的回復）

初期宇宙 ( $T > 0$ ) や核物質（原子核）中 ( $\rho > 0$ ) でのハドロンの性質の変化が議論されている

## 14 ハドロンパートのまとめ

- ハドロン：クォークとグルーオンからなる自己束縛系、数百種類が存在
- 対称性：ハドロンの分類や性質を規定する  
(カラー対称性、フレーバー対称性、カイラル対称性)
- QCD：漸近自由性から低エネルギーで結合定数が大きくなり、摂動論が破綻  
カラーの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れ、エキゾチックハドロンなどの非自明な現象が起こる
- その他の話題
  - 有効場の理論 (カイラル摂動論)
  - QGP (クォーク・グルーオンプラズマ)、重イオン衝突、QCD 物性
  - 高エネルギー QCD、核子構造
  - ...