

12 QCD の漸近自由性

12.1 場の量子論の概要

- 場 (field) $\phi(t, \mathbf{x})$: 電場や磁場のように、時間 t 、空間 \mathbf{x} の各点で値が決まった関数
QED の電子と光子、QCD のクォークとグルーオンは全て場で表される
- **量子化** : 場 ϕ (量子力学の x) とその正準共役量 π (量子力学の p) を演算子にして交換関係を課す
⇒ ϕ の量子数を持つ粒子の生成・消滅が表現できる
c.f.) 1次元調和振動子の生成消滅演算子 a, a^\dagger

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger), \quad [x, p] = i\hbar \quad (297)$$

- 場の理論の状態ベクトル $|\Omega\rangle$: 粒子 ϕ が 0 個、1 個、2 個、、、存在する状態の重ね合わせ
- 場の量子論は通常解析的に解けない ($|\Omega\rangle$ の一般解を書けない) ⇒ 結合定数による **摂動計算**
- **ファインマン図** (Feynman diagram) : 摂動計算の各項を図形的に表す方法
粒子の時空の伝播の様子に対応する
- 場の量子論はラグランジアン密度 \mathcal{L} で特徴付けられる (量子力学のハミルトニアン)
例) ϕ^4 理論 (場の座標は全て同一点 x^μ)

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}_{\text{運動項}} - \underbrace{\frac{m^2}{2}\phi^2}_{\text{質量項}} - \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{\text{相互作用項}} \quad (298)$$

- $\mu = 0, 1, 2, 3$ ($\mu = 0$ が時間、 $\mu = 1, 2, 3$ が空間)、繰り返し添字は和をとる
- 4元ベクトルと微分 (添字の上下で空間成分の符号が異なる)

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{x}), \quad x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{x}^2 = x^2, \quad (299)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (300)$$

- ϕ : スピン 0 のボソンを表す場
- m : ϕ が表す粒子の質量、 λ : **結合定数** (coupling constant)
- ファインマン則 : ラグランジアンから導かれるファインマン図の部品と、数式に直す処方箋
 - 運動項と質量項 : ϕ の 2 次、粒子 ϕ の伝播を表すプロパゲーター (propagator)、図 37(a)
 - 相互作用項 : ϕ の 4 次、粒子 ϕ の相互作用を表す頂点 (vertex)、図 37(b)
 - プロパゲーターと頂点を組み合わせてできるファインマン図は全て実現可能

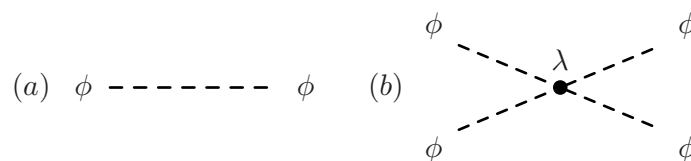


図 37: ϕ^4 理論のファインマン則。(a) : プロパゲーター、(b) : 相互作用頂点。

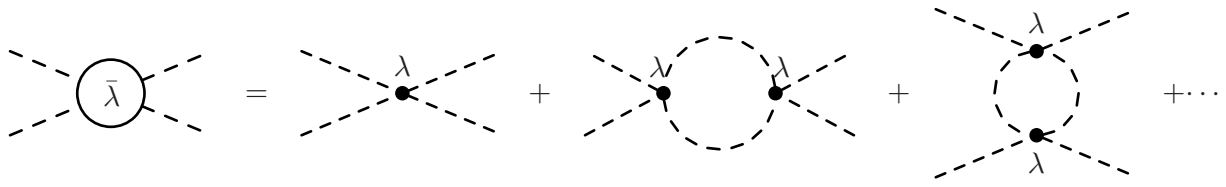


図 38: ϕ^4 理論での $\phi\phi$ 散乱のファインマン図の例。

- 場の量子論の計算：興味のある過程に寄与する全ての可能なファインマン図を足しあげる
例) ϕ^4 理論での $\phi\phi$ 散乱：始状態 ϕ 粒子 2 つ、終状態 ϕ 粒子 2 つ
 - 図 38 右辺第 1 項：tree level (ループを含まない)、古典極限に対応
 - 図 38 右辺第 2 項、第 3 項：ループを含む、量子補正に対応
 - 結合定数のべき展開になっている (第 1 項は λ^1 、第 2 項、第 3 項は λ^2 など)
⇒ **結合定数が小さい** ($\lambda \ll 1$) とき、摂動計算 (有限項での近似) が正当化される
- 図 38 左辺も始状態 ϕ 粒子 2 つ、終状態 ϕ 粒子 2 つ
⇒ λ は古典極限での結合定数、 $\bar{\lambda}$ が量子補正も含めた実効的な結合定数
相互作用項の係数は量子補正によって変更を受ける：**くりこみ** (renormalization)

$$\bar{\lambda} = \lambda + (\text{量子補正 } \mathcal{O}(\lambda^2)) \quad (301)$$

ループの積分が発散する場合は無限大を結合定数と相殺させる
朝永、シュヴィンガー、ファインマンにノーベル賞 (1965 年)

12.2 古典電磁気学と QED

- 古典電磁気学の基本方程式：マクスウェル方程式 (自然単位系 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1$ で ρ と \mathbf{j} の定義を調整)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (302)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (303)$$

- ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (304)$$

$$E^i = -\frac{\partial A^i}{\partial t} - \nabla^i\phi, \quad B^i = \epsilon^{ijk}\nabla^j A^k = \epsilon^{jki}\nabla^j A^k \quad (305)$$

ポテンシャルで与えられる電磁場は式 (303) を自動的に満たす

- 相対論的な電場、磁場の記法：場の強度 (field strength) テンソル $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (306)$$

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k, \quad (307)$$

$$A^\mu = (\phi, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \mathbf{A}) \quad (308)$$

(i, j などの添字は空間成分 1, 2, 3 のみ)

定義 (306) より、 $F^{\mu\nu}$ は添字の入れ替えについて反対称

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (309)$$

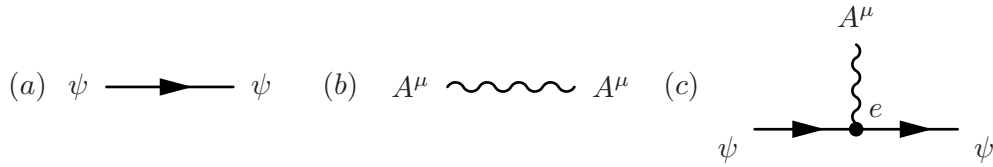


図 39: QED のファインマン則。(a) : 電子のプロパゲーター、(b) : 光子のプロパゲーター、(c) : 光子と電子の相互作用頂点。

- マクスウェル方程式 :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad j^\mu = (\rho, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \mathbf{j}) \quad (310)$$

問題 12.1*

- 1) 式 (307) を用いて $F^{\mu\nu}$ による電場、磁場の定義が式 (305) と一致する (つまりマクスウェル方程式 (303) を満たす) ことを示せ。ただし $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$ である。
- 2) 場の強度テンソルの反対称性 (309) を用いて $F^{\mu\nu}$ の対角成分が 0 であることを示せ。
- 3) 式 (307) を利用し $F^{\mu\nu}$ を電場、磁場を用いた 4×4 行列で表示せよ。
- 4) 式 (310) の $\nu = 0$ 成分 $\partial_\mu F^{\mu 0} = j^0$ が $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ と一致し、 $\nu = i$ 成分 $\partial_\mu F^{\mu i} = j^i$ が $(\nabla \times \mathbf{B})^i - \frac{\partial E^i}{\partial t} = j^i$ と一致する (つまり非斉次マクスウェル方程式 (302) を満たす) ことを確認せよ。

- **量子電磁気学 (QED)** のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (311)$$

- 共変微分 : 電磁気学のゲージ不変性を満たす微分

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + i(-e)A_\mu\psi \quad (312)$$

- A^μ : 光子 (photon、スピン 1 のボソン)
- ψ : 電子 (electron、スピン 1/2 のフェルミオン)、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
- γ^μ : デイラック行列
- m : 電子質量、 e : 結合定数 (電子の電荷)

- 式 (311) から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式 (古典極限) :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (313)$$

- $e\bar{\psi}\gamma^0\psi = \rho$ 、 $-e\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi = \mathbf{j}$ であり、マクスウェル方程式 (310) を再現する

- QED のファインマン則

- $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$: 電子のプロパゲーター、図 39(a)
粒子・反粒子の区別があるフェルミオン (電子) のプロパゲーターには矢印をつける
- $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$: 光子のプロパゲーター、図 39(b)
自分自身が反粒子であるボソン (光子) のプロパゲーターは矢印なし
- $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$: 光子と電子の相互作用頂点、図 39(c)

- 古典電磁気学のゲージ不変性

スカラー関数 $\chi(t, \mathbf{x})$ を用いた以下の変換で電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} は不変 (ポテンシャルの任意性)

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\chi, \quad \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (314)$$

- QED のゲージ不変性

スカラー関数 $\theta(x)$ を用いた以下の変換で QED ラグランジアン (311) は不変

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}, \quad A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) \quad (315)$$

$\theta(x) = e\chi(x)$ とすれば古典電磁気学の結果を再現

- 電子場の位相変換 (U(1) 変換)、ただし回転角度が座標 x に依存する **局所対称性**
QED は可換ゲージ理論

問題 12.2

- 1) ゲージ変換 (315) のもとで QED ラグランジアン (311) の第 1 項がゲージ不変 (ゲージ変換で元に戻る) であることを示せ。ただし $\theta(x)$ に特異性はないとする。
- 2) QED ラグランジアン (311) の第 2 項 ($\bar{\psi}\psi$ の項) がゲージ不変であることを示せ。ただし γ^μ は $\theta(x)$ と交換する。

12.3 QCD

- **量子色力学 (QCD)** : 局所 SU(3) 対称性で不変な **非可換ゲージ理論**

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \bar{q}_{i,f}(i\gamma^\mu(D_\mu)_{ij} - m_f\delta_{ij})q_{j,f} \quad (316)$$

- 場の強度テンソル: SU(3) の **非可換性** から A の 2 次の項を含む (問題 12.3 参照)

$$G^{a,\mu\nu} = \partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu} - gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu \quad (317)$$

- 共変微分:

$$(D_\mu)_{ij}q_{j,f} = [\partial_\mu\delta_{ij} + igA_\mu^a(T^a)_{ij}]q_{j,f} = \partial_\mu q_{i,f} + igA_\mu^a(T^a)_{ij}q_{j,f} \quad (318)$$

- $A^{a,\mu}$: グルーオン (gluon、スピン 1、カラー 8 のボソン、 $a = 1, \dots, 8$)
- $q_{i,f}$: クォーク (quark、スピン 1/2、カラー 3 のフェルミオン、 $i = 1, 2, 3$)
- m_f : フレーバー f のクォーク質量、 g : QCD 結合定数
- 構造定数 f^{abc} と生成子の性質

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad \text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (319)$$

- QED との違い

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu} - gf^{ade}A^{d,\mu}A^{e,\nu}) \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu}) \\ &\quad - (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)gf^{ade}A^{d,\mu}A^{e,\nu} - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu}) \\ &\quad + g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu}A^{e,\nu} \end{aligned}$$

A の 3 次、4 次の項: グルーオンの **自己相互作用項**

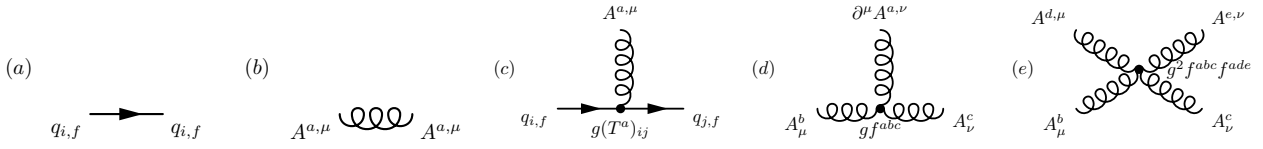


図 40: QCD のファインマン則。(a): クォークのプロパゲーター、(b): グルーオンのプロパゲーター、(c): グルーオンとクォークの相互作用頂点、(d): グルーオンの 3 点相互作用頂点、(e): グルーオンの 4 点相互作用頂点。

• QCD のファインマン則

- $\bar{q}_{i,f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)q_{i,f}$: クォークのプロパゲーター、図 40(a)
- $-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu})$: グルーオンのプロパゲーター、図 40(b)
- $-g\bar{q}_{i,f}\gamma^\mu A_\mu^a(T^a)_{ij}q_{j,f}$: グルーオンとクォークの相互作用頂点、図 40(c)
- $-(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)g f^{ade} A^{d,\mu} A^{e,\nu} - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu})$: グルーオンの 3 点相互作用頂点、図 40(d)
- $g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu}$: グルーオンの 4 点相互作用頂点、図 40(e)

• クォーク・グルーオン頂点とグルーオンの自己相互作用の結合定数が同じ $g \leftarrow$ ゲージ不変性

• QCD のゲージ不変性

ユニタリ行列 $U_{ij} = (e^{i\theta^a(x)T^a})_{ij}$ を用いた以下の変換で QCD ラグランジアン (316) は不変

$$q_{i,f} \rightarrow U_{ij}q_{j,f}, \quad \bar{q}_{i,f} \rightarrow \bar{q}_{j,f}U_{ji}^\dagger, \quad A^{a,\mu}(T^a)_{ij} \rightarrow U_{ik} \left[A^{a,\mu}(T^a)_{kj} - \frac{i}{g}\delta_{kj}\partial^\mu \right] U_{ji}^\dagger \quad (320)$$

問題 12.3

- 1) SU(3) の生成子 T^a と縮約したゲージ場を $A^\mu = A^{a,\mu}T^a$ 、場の強度テンソルを $G^{\mu\nu} = G^{a,\mu\nu}T^a$ と定義する。このとき $G^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu]$ と表せることを示せ。ただし構造定数は完全反対称になるように生成子を選んであるとする。
- 2) $G^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu]/(ig)$ と表せることを示せ。
- 3) 共変微分が $D^\mu \rightarrow UD^\mu U^\dagger$ と変換することを示せ。
- 4) 共変微分 D^μ の変換性に注意し、QCD ラグランジアン (316) がゲージ変換 (320) で不変であることを示せ。

12.4 結合定数のくりこみと漸近自由性

• QED、QCD の結合定数 e 、 g も量子補正を受ける

微細構造定数 $\alpha = e^2/(4\pi)$ 、 $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ を用いた結合定数の量子補正

$$\alpha(Q^2) \approx \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-1} = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots, \quad (321)$$

$$\alpha_s(Q^2) \approx \alpha_s \left(1 + \frac{(11 - 2N_f/3)\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-1} = \alpha_s - \frac{(11 - 2N_f/3)\alpha_s^2}{4\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \quad (322)$$

右辺の α 、 α_s はくりこみスケール μ での結合定数の値

Q^2 は左辺の結合定数を測定するエネルギースケール

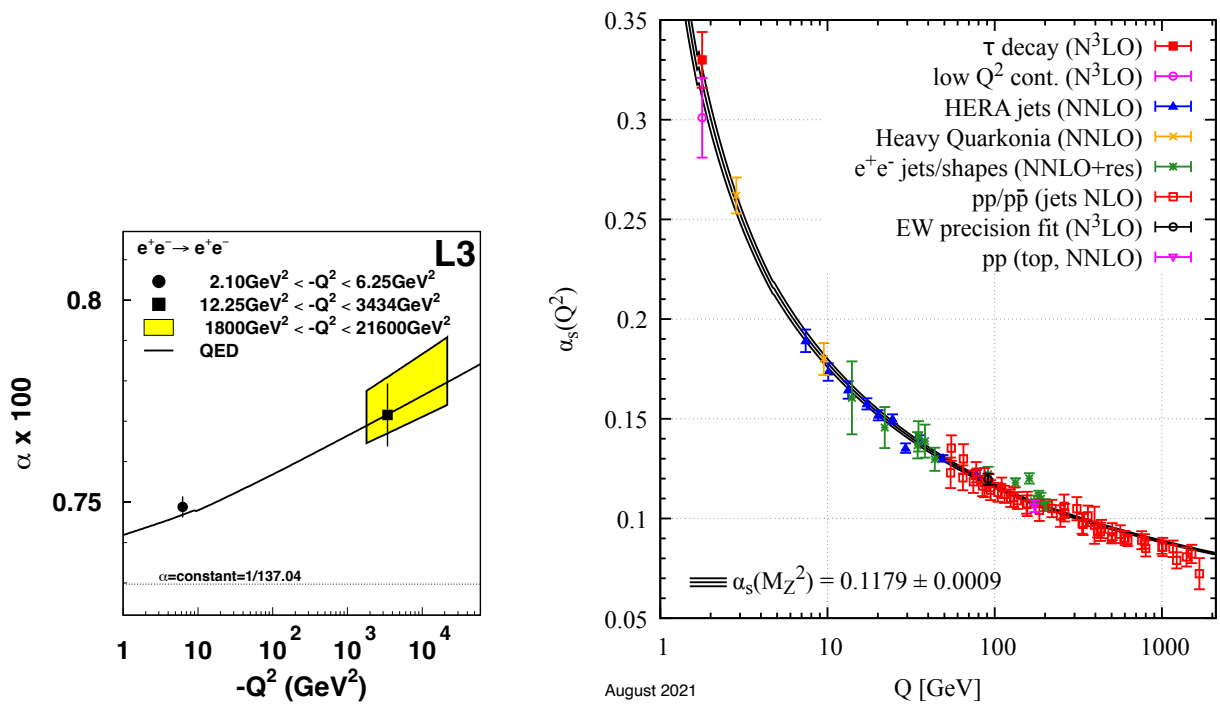


図 41: QED 結合定数 α (左) と QCD 結合定数 α_s (右) のエネルギースケール Q^2 依存性。左: P. Achard et al. (L3 Collaboration), Phys. Lett. B623, 26 (2005) から引用。右: The Review of Particle Physics, R.L. Workman et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2022, 083C01 (2022) から引用。

- 量子効果は短距離 (マイクロ) で強く、長距離 (マクロ) スケールで弱い
 ⇒ エネルギースケール Q^2 によって結合定数の強さが変化する (running coupling constant)
 Q^2 大 ⇔ 高エネルギー ⇔ 短距離
 Q^2 小 ⇔ 低エネルギー ⇔ 長距離
- 結合定数のくりこみに対する寄与
 - $1/(3\pi) > 0$: 電子 (フェルミオン) ループによる量子補正
 - $N_f/(6\pi) > 0$: クォーク (フェルミオン) ループによる量子補正
 - $-11/(4\pi) < 0$: グルーオン (非可換ゲージ場) ループによる量子補正
- QCD にはグルーオンの自己相互作用項があるため QED と量子補正の効き方が異なる
 - QED: 長距離で結合定数が小さくなる (図 41 左、真空分極による電荷の遮蔽)
 - QCD: 短距離で結合定数が小さくなる (図 41 右): **漸近自由性**
 ⇒ 長距離で結合定数が大きくなる
 グロス、ウィルチェック、ポリツァーにノーベル賞 (2004 年)
- 摂動論 (結合定数でのべき展開) が有効なのは結合定数が小さい場合
 - QED は低エネルギーで摂動可能
 ⇒ 日常生活では古典電磁気学 (摂動の 0 次) が有効、量子効果は小さい補正 ($\alpha \sim 1/137$)
 - QCD は高エネルギーで摂動可能
 ⇒ 低エネルギー (ハドロンの世界) では摂動展開が破綻、直接 QCD で計算できない
 カラー閉じ込め、カイラル対称性の自発的破れと関係していると考えられているが現在でも未解明