# 10　フレーバー対称性

## 10.1　QCD のフレーバー対称性

- 対称性とその破れ：問題が解けなくても解の性質に制限がかかる
- QCD の持つ対称性とハドロンの性質
  - 回転対称性（ローレンツ対称性の一部）→ ハドロンは決まったスピン $J$ を持つ
  - パリティ対称性 → ハドロンは決まったパリティ $P$ を持つ
  - **フレーバー対称性**（近似的対称性）→ ハドロンの**多重項による分類**と**質量公式**
- 場の量子論でのスピン 1/2 のフェルミオンの**質量項**

$$\mathcal{L} = -M_B \bar{\psi}\psi \tag{251}$$

$\psi$、$\bar{\psi}$ は場の演算子、時間と空間の関数、§12 で少し詳しく説明
$\bar{\psi}\psi$ の前の係数（$-$ 符号付き）が粒子の質量を与える

- QCD の質量項（$u, d, s$ のみ）

$$\mathcal{L} = -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s = -\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \tag{252}$$

表 8 より、$m_u \sim 2$ MeV、$m_d \sim 5$ MeV、$m_s \sim 93$ MeV

- SU(2) 変換（$U$ は $2 \times 2$ 行列）

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} U^\dagger, \quad U = \exp\{-i\theta^a \sigma^a/2\} \tag{253}$$

- SU(3) 変換（$U$ は $3 \times 3$ 行列）

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} U^\dagger, \quad U = \exp\{-i\theta^a \lambda^a/2\} \tag{254}$$

- $u$ クォークと $d$ クォークの質量が $m_u = m_d = \hat{m}$ と等しい場合

$$\mathcal{L} = -\hat{m} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to -\hat{m} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} U^\dagger U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = -\hat{m} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \mathcal{L} \tag{255}$$

QCD はフレーバー SU(2) 変換（アイソスピン変換）に対して不変：**アイソスピン SU(2) 対称性**

- 全てのクォークの質量が $m_u = m_d = m_s = m$ と等しい場合

$$\mathcal{L} = -m \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to -m \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} U^\dagger U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \mathcal{L} \tag{256}$$

QCD はフレーバー SU(3) 変換に対して不変：**フレーバー SU(3) 対称性**

- 対称性の帰結：同じ規約表現（フレーバー多重項）に属するハドロンの質量は**縮退**する
  例）$p_\uparrow$ と $p_\downarrow$：$S=1/2$ つまり SU(2) の **2** 表現に属する

$$[H,U]=0 \quad \Rightarrow \quad |p_\uparrow\rangle \text{ と } |p_\downarrow\rangle = U\,|p_\uparrow\rangle \text{ が同じエネルギー } E \text{ を持つ} \tag{257}$$

  例）$p$ と $n$：$I=1/2$ つまり SU(2) の **2** 表現に属する

$$[H,U]=0 \quad \Rightarrow \quad |p\rangle \text{ と } |n\rangle = U\,|p\rangle \text{ が同じエネルギー } E \text{ を持つ} \tag{258}$$

  例）$N$ と $\Lambda$：SU(3) の **8** 表現に属する

$$[H,U]=0 \quad \Rightarrow \quad |N\rangle \text{ と } |\Lambda\rangle = U\,|N\rangle \text{ が同じエネルギー } E \text{ を持つ} \tag{259}$$

  必ずしも QCD からハドロン質量が計算できる必要はない

- 現実の QCD（$m_u \neq m_d \neq m_s$）では対称性は厳密ではない
  **近似的対称性**なので**破れの効果**を考慮する必要がある
  → ハドロンの質量項式（c.f. ゼーマン効果）

- SU(3) の破れ（$u, d$ クォークは共通の質量 $\hat{m}$、$s$ クォークの質量 $m_s$）

$$-\hat{m}\bar{u}u - \hat{m}\bar{d}d - m_s\bar{s}s = -\frac{2\hat{m}+m_s}{3}\bar{q}q - \frac{\hat{m}-m_s}{\sqrt{3}}\bar{q}\lambda^8 q \tag{260}$$

  $s$ クォークによる対称性の破れは $\lambda^8 = \mathrm{diag}(1,1,-2)/\sqrt{3}$ を用いて表現できる
  （同様に $u$,$d$ クォークの質量差は $\lambda^3 = \mathrm{diag}(1,-1,0)$ を用いて表現できる）

- $\lambda^8$ の項が SU(3) 対称性を破ること：

$$\bar{q}\lambda^8 q \to \bar{q}U^\dagger\lambda^8 U q = \bar{q}\exp\{i\theta^a\lambda^a/2\}\lambda^8\exp\{-i\theta^a\lambda^a/2\}q \neq \bar{q}\lambda^8 q \tag{261}$$

---

**問題 10.1***
$\lambda^8$ の具体形を用いて式 (260) 右辺を計算し左辺が得られることを確認せよ。

---

### 10.2 アイソスピン SU(2)

- アイソスピン対称性の帰結：ハドロンは SU(2) の規約表現に属する
  同じ表現に属するハドロンの質量は（SU(2) の破れの効果を除いて）縮退する

- アイソスピン 2 重項の例：$N=(p,n)$
  - $p$：$I_3=+1/2$、$m_p = 938$ MeV,
  - $n$：$I_3=-1/2$、$m_n = 940$ MeV

- アイソスピン 3 重項の例：$\pi=(\pi^+,\pi^0,\pi^-)$
  - $\pi^+$：$I_3=+1$、$m_{\pi^\pm}=140$ MeV,
  - $\pi^0$：$I_3=0$、$m_{\pi^0}=135$ MeV,
  - $\pi^-$：$I_3=-1$、$m_{\pi^\pm}=140$ MeV

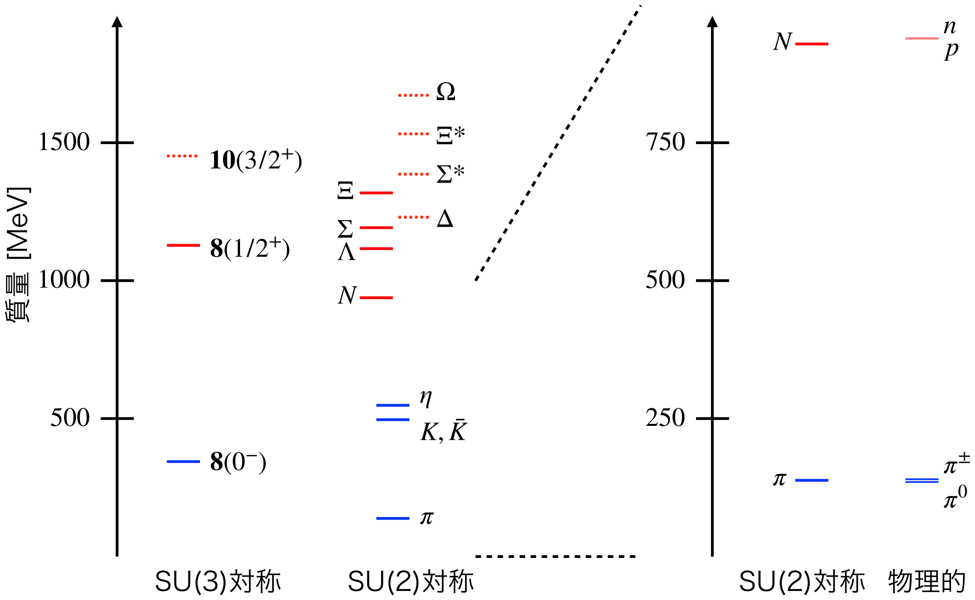


図 29: ハドロン質量におけるフレーバー対称性の破れ。左：SU(3) 対称性の破れ、右：SU(2) 対称性の破れ。

- SU(2) の破れは**数 MeV 程度**（図 29 右）

$$m_\pi = 138 \pm 3 \text{ MeV}, \tag{262}$$

$$M_N = 939 \pm 1 \text{ MeV} \tag{263}$$

ハドロンの質量（$\sim 940$ MeV）に比べて**非常に小さい**（$u, d$ クォークの質量差が小さいため）
$\Rightarrow$ ハドロン物理では多くの場合アイソスピン対称性を仮定して問題ない

## 10.3　フレーバー SU(3)

- SU(3) 対称性の帰結：ハドロンは SU(3) の規約表現に属する
  同じ表現に属するハドロンの質量は（SU(3) の破れの効果を除いて）縮退する
- メソン 8 重項の例：$J^P = 0^-$ の基底状態のメソン（図 29 左）
  - $\pi$：$I = 1$、$S = 0$、アイソスピン状態 3 つ、$m_\pi = 138$ MeV,
  - $K$：$I = 1/2$、$S = +1$、アイソスピン状態 2 つ、$m_K = 496$ MeV,
  - $\bar{K}$：$I = 1/2$、$S = -1$、アイソスピン状態 2 つ、$m_{\bar{K}} = 496$ MeV,
  - $\eta$：$I = 0$、$S = 0$、アイソスピン状態 1 つ、$m_\eta = 548$ MeV
- バリオン 8 重項の例：$J^P = 1/2^+$ の基底状態のバリオン（図 29 左）
  - $N$：$I = 1/2$、$S = 0$、アイソスピン状態 2 つ、$M_N = 939$ MeV,
  - $\Lambda$：$I = 0$、$S = -1$、アイソスピン状態 1 つ、$M_\Lambda = 1116$ MeV,
  - $\Sigma$：$I = 1$、$S = -1$、アイソスピン状態 3 つ、$M_\Sigma = 1193$ MeV,
  - $\Xi$：$I = 1/2$、$S = -2$、アイソスピン状態 2 つ、$M_\Xi = 1318$ MeV
- バリオン 10 重項の例：$J^P = 3/2^+$ の基底状態のバリオン（図 29 左）

– $\Delta$：$I=3/2$、$S=0$、アイソスピン状態 4 つ、$M_\Delta \sim 1232$ MeV,
– $\Sigma^*$：$I=1$、$S=-1$、アイソスピン状態 3 つ、$M_{\Sigma^*} \sim 1385$ MeV,
– $\Xi^*$：$I=1/2$、$S=-2$、アイソスピン状態 2 つ、$M_{\Xi^*} \sim 1533$ MeV,
– $\Omega$：$I=0$、$S=-3$、アイソスピン状態 1 つ、$M_\Omega \sim 1672$ MeV

- 質量の比較：SU(3) の破れは **200 MeV 程度**

$$m_{メソン\ 8} = 343 \pm 205 \text{ MeV}, \tag{264}$$
$$M_{バリオン\ 8} = 1129 \pm 190 \text{ MeV}, \tag{265}$$
$$M_{バリオン\ 10} = 1452 \pm 220 \text{ MeV} \tag{266}$$

アイソスピンと違って **SU(3) 対称性の破れ**は無視できない（$m_s \gg \hat{m}$ なので）

## 10.4 フレーバー SU(3) 対称性の破れとハドロンの質量公式

- バリオン 8 重項の行列表現（$\bar{\Xi}^-$ は $\Xi^-$ の反粒子の意味、$\bar{\Xi}^+$ と書くことも多い）

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}, \tag{267}$$
$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} \end{pmatrix} \tag{268}$$

SU(3) 変換

$$B \to UBU^\dagger, \quad \bar{B} \to U\bar{B}U^\dagger \tag{269}$$

- SU(3) 対称なバリオン質量項（全てのバリオンの質量が $M_0$）

$$\mathcal{L} = -M_0 \text{Tr}\,[\bar{B}B] \tag{270}$$
$$= -M_0\bar{p}p - M_0\bar{n}n - M_0\bar{\Lambda}\Lambda - M_0\bar{\Sigma}^+\Sigma^+ - M_0\bar{\Sigma}^0\Sigma^0 - M_0\bar{\Sigma}^-\Sigma^- - M_0\bar{\Xi}^0\Xi^0 - M_0\bar{\Xi}^-\Xi^- \tag{271}$$

SU(3) 対称性

$$\text{Tr}\,[\bar{B}B] \to \text{Tr}\,[U\bar{B}U^\dagger UBU^\dagger] = \text{Tr}\,[\bar{B}BU^\dagger U] = \text{Tr}\,[\bar{B}B] \tag{272}$$

- アイソスピン多重項を導入（アイソスピン対称性は破らない）

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}^+ & \bar{\Sigma}^0 & \bar{\Sigma}^- \end{pmatrix}, \tag{273}$$
$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{\Xi}^0 & \bar{\Xi}^- \end{pmatrix}, \tag{274}$$
$$\bar{N}N = \bar{p}p + \bar{n}n, \quad \bar{\Sigma}\Sigma = \bar{\Sigma}^+\Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0\Sigma^0 + \bar{\Sigma}^-\Sigma^-, \quad \bar{\Xi}\Xi = \bar{\Xi}^0\Xi^0 + \bar{\Xi}^-\Xi^- \tag{275}$$

質量項は

$$\mathcal{L} = -M_0\bar{N}N - M_0\bar{\Lambda}\Lambda - M_0\bar{\Sigma}\Sigma - M_0\bar{\Xi}\Xi \tag{276}$$

- SU(3) の破れ：$\lambda^8$ を導入することで**QCD と同じ形で SU(3) を破る**

$$\mathcal{L}_{SB} = -\alpha \mathrm{Tr}\,[\bar{B}\lambda^8 B] - \beta \mathrm{Tr}\,[\bar{B}B\lambda^8] \tag{277}$$

8 重項の質量では 2 通りの破れ方（$\alpha, \beta$）が可能で、両者は線形独立（$\mathbf{8}\otimes\mathbf{8}\otimes\mathbf{8}$ の分解に $\mathbf{1}$ が 2 つある）

$$-\alpha \mathrm{Tr}\,[\bar{B}\lambda^8 B] = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\bar{N}N + \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\bar{\Lambda}\Lambda - \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\bar{\Sigma}\Sigma + \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}\bar{\Xi}\Xi, \tag{278}$$

$$-\beta \mathrm{Tr}\,[\bar{B}B\lambda^8] = \frac{2\beta}{\sqrt{3}}\bar{N}N + \frac{\beta}{\sqrt{3}}\bar{\Lambda}\Lambda - \frac{\beta}{\sqrt{3}}\bar{\Sigma}\Sigma - \frac{\beta}{\sqrt{3}}\bar{\Xi}\Xi \tag{279}$$

- SU(3) の破れを考慮したバリオン質量：$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{SB}$

$$M_N = M_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{2\beta}{\sqrt{3}}, \quad M_\Lambda = M_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\beta}{\sqrt{3}}, \tag{280}$$

$$M_\Sigma = M_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}}, \quad M_\Xi = M_0 - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \tag{281}$$

左辺は 4 変数、右辺は 3 変数なので、右辺の変数を消去すると左辺の変数に関する関係式が出る

- 8 重項ハドロンに対する**ゲルマン大久保の質量公式**

$$2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma \tag{282}$$

---

**問題 10.2**

1) Tr $\bar{B}B = [\bar{B}B]_{11} + [\bar{B}B]_{22} + [\bar{B}B]_{33}$ である（$[X]_{ij}$ は行列 $X$ の $ij$ 成分)。$\bar{B}B$ の対角成分を計算し式 (271) を確認せよ。

2) 式 (278) と (279) を確認せよ。

3) 式 (280)、(281) を代入し質量公式 (282) が成立することを確認せよ。

4) 表 7 の数値を用いて、式 (282) の左辺と右辺の数値を比較せよ。

---

- 一般の多重項に対するゲルマン大久保の質量公式（$a, b, c$ は多重項ごとに決まるパラメーター）

$$M(I,Y) = a + bY + c\left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] \tag{283}$$

- 式 (283) によるバリオン 8 重項の質量

$$M_N = a_8 + b_8 + \frac{c_8}{2}, \quad M_\Lambda = a_8, \tag{284}$$

$$M_\Sigma = a_8 + 2c_8, \quad M_\Xi = a_8 - b_8 + \frac{c_8}{2}, \tag{285}$$

式 (280)、(281) と比較すると

$$a_8 = M_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\beta}{\sqrt{3}}, \quad b_8 = \frac{3\alpha}{2\sqrt{3}} - \frac{3\beta}{2\sqrt{3}}, \quad c_8 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \tag{286}$$

- 質量公式によるバリオン 10 重項質量：

$$M_\Delta = a_{10} + b_{10} + \frac{7}{2}c_{10}, \quad M_{\Sigma^*} = a_{10} + 2c_{10}, \tag{287}$$

$$M_{\Xi^*} = a_{10} - b_{10} + \frac{1}{2}c_{10}, \quad M_\Omega = a_{10} - 2b_{10} - c_{10} \tag{288}$$

- 質量差が等間隔（図 29 左も参照）

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_\Omega - M_{\Xi^*} = -b_{10} - \frac{3}{2}c_{10} \tag{289}$$

$M_\Delta = 1232$ MeV、$M_{\Sigma^*} = 1385$ MeV、$M_{\Xi^*} = 1533$ MeV を代入すると

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = 153 \text{ MeV}, \quad M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = 148 \text{ MeV} \tag{290}$$

より **$\Delta$、$\Sigma^*$、$\Xi^*$ から $\Omega$ の存在が予言できる**：

$$M_\Omega \sim 1530 + 150 = 1680 \text{ MeV} \quad \leftrightarrow \quad \text{実験：} M_\Omega = 1672 \text{ MeV} \tag{291}$$

- 歴史：
  - 1952 年：$\Delta$ の発見（$\pi N$ 散乱の共鳴）
  - 1960 年：$\Sigma(1385)$ の発見（$K^- p \to \Lambda\pi^-\pi^+$ 反応中の $\Lambda\pi$ の不変質量分布）
  - 1962 年 6 月：$\Xi(1530)$ の発見（$K^- p \to \Xi K\pi$ 反応中の $\Xi\pi$ 不変質量分布）の論文が出版
  - 1962 年 7 月の国際会議：ゲルマンが SU(3) 対称性を用いて $\Omega^-$ を予言
  - 1964 年：$\Omega$ の発見（$K^- p \to \Xi^0\pi^- K^+ K^0$ 反応中の $\Xi^0\pi^-$ 不変質量分布）