1　原子核物理学概観

1.1　物質の成り立ち

- 原子：物質を構成する最小単位、原子核と電子が構成要素 ~ 0.1 nm $= 10^{-10}$ m
- 原子核：核子（陽子と中性子）が構成要素 ~ 10 fm $= 10^{-14}$ m
- 核子：クォークとグルーオンが構成要素 ~ 1 fm $= 10^{-15}$ m（図 1）
- 原子核物理では、原子・分子とは異なるスケールの現象を扱う
（c.f. 10^4 のスケールの違いは太陽と太陽系の大きさの比とほぼ同じ）
- n(ナノ)：10^{-9}、f(フェムト)：10^{-15}、M(メガ)：10^6、G(ギガ)：10^9

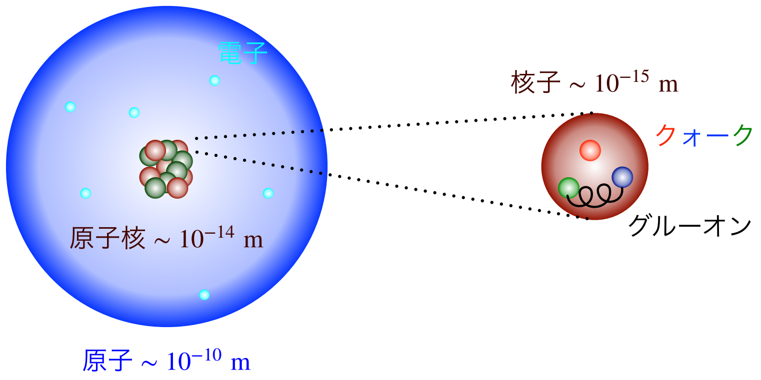

図 1: 原子、原子核、クォークの模式図。

1.2　強い相互作用

- 自然界には 4 つの力（重力、電磁気力、強い相互作用、弱い相互作用）がある
- 重力：$F_G = -\dfrac{GmM}{r^2}$（常に引力）
- 電磁気力：$F_C = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{QQ'}{r^2}$（電荷によって引力または斥力）
- 原子：正電荷の原子核と負電荷の電子が電磁気力によって束縛（電磁気力で理解できる）
- 原子核は正電荷を持った陽子が原子よりコンパクトな空間に密集
電磁気力（斥力）に打ち勝つ引力が必要：核子間にはたらく強い力（**核力**）
- クォーク・グルーオンの間にはたらく基本相互作用：**量子色力学（QCD）**
色電荷（$\pm$ ではなく r, g, b）の間の相互作用
- QCD と核力の関係 $\sim$ 電磁相互作用と原子・分子間力の関係

問題 1.1*
二つの陽子を距離 2.0 fm 離して配置したときの、重力による引力と電磁気力による斥力を計算せよ。ただし陽子の質量を 1.7×10^{-27} kg、電荷を 1.6×10^{-19} C、万有引力定数を $G = 6.7 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}、真空の誘電率を $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ C$^2 \cdot$ N$^{-1} \cdot$ m^{-2} とする。

1.3 原子核・ハドロンの多様性と目指す物理

- **原子核**：水素、鉄、鉛、ニホニウム、など
  安定核が約 300 種、不安定核が約 6000 種（このうち 1/3 が観測されている）

- **ハドロン**：陽子、中性子、π 中間子（核力を媒介する）、など強い相互作用をする粒子の総称
  約 300 種が観測されている

- **クォーク**：3 つのカラー、6 つのフレーバー（u, d, s, c, b, t）を持つ**素粒子**

- 目標：多様な構造（数百もの原子核やハドロン）を基本的自由度（核子、クォーク）から解明する

- 面白さ：基礎理論（QCD、核力）がわかっていてもハドロン・原子核を直接計算できない
  $\leftarrow$ QCD が非摂動的で解けない、粒子数が 1 $\sim$ 数百の有限量子多体系（統計力学的方法？）

- 手法：ミクロの世界（量子力学：プランク定数 $\hbar$）＋高エネルギー（相対論：光速 c）$\Rightarrow$ 場の量子論

1.4 自然単位系

- 基本的な次元：時間 $[T]$、長さ $[L]$、質量 $[M]$

- 昔の決め方：s $\leftarrow$ 地球の自転周期、m $\leftarrow$ 子午線の長さ、kg $\leftarrow$ キログラム原器（水 1 リットル）

- 現在の決め方：SI（Système International d’unités）

  – s $\leftarrow$ セシウム原子時計（1967 年）
  – m $\leftarrow$ 光速が $c = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ と**定義**（1983 年）
  – kg $\leftarrow$ プランク定数が $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}}$ と**定義**（2019 年 5 月 20 日）

- わかること：$c\ [LT^{-1}]$ と $h\ [L^2MT^{-1}]$（または $\hbar = h/(2\pi)$）は次元間の関係を与える「ものさし」
  異なる「ものさし」を用いて新しい単位を作ってもよい

- **自然単位系**：$c = 1, \hbar = 1$ とした単位系
  $c = 1 \Rightarrow LT^{-1} = 1$ を用いて T を消去することで時間を $[L]$ で表すことができる
  $\hbar = 1 \Rightarrow L^2MT^{-1} = LM = 1$ を用いて M を消去することで質量を $[L^{-1}]$ で表すことができる

- 通常の単位系に変換するには、c や $\hbar$ を適宜かけて単位を調整する
  例）5.0 fm の時間（自然単位系）
  $\Rightarrow 5.0\ \mathrm{fm}/c$ の時間（SI）$= 5.0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}/c \simeq 1.7 \times 10^{-23}\ \mathrm{s}$

- **電子ボルト（eV）**：電子を 1V の電位差で加速して得られるエネルギー、約 1.6×10^{-19} J（$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$）
  原子核物理で自然なエネルギーの単位は MeV（10^6 eV）、GeV（10^9 eV）
  例）陽子の質量は約 940 MeV（自然単位系）
  $\Rightarrow 940\ \mathrm{MeV}/c^2$（SI）$= 940 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}/c^2 = 1.7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

- 換算に便利な量：$\hbar c \simeq 197.3269804$ MeV fm（197 ぐらいまで覚えておくとよい）

問題 1.2
高エネルギー現象を扱わない量子力学の問題では、系に現れる質量とプランク定数を 1 とした $m=1, \hbar=1$ の単位系が便利な場合がある。これを「量子力学単位系」と呼ぶことにする。以下の物理量について、SI での次元と、自然単位系、量子力学単位系それぞれで長さ $[L]$ を基準にした場合の次元を表にまとめよ。

物理量	長さ	時間	質量	運動量	エネルギー	角運動量	作用（$S=\int Ldt$）
SI	$[L]$	$[T]$	$[M]$				
自然単位系	$[L]$	$[L]$	$[L^{-1}]$				
量子力学単位系	$[L]$		$[L^0]$				

1.5 原子核の発見

- X 線の発見：レントゲン（1895 年）、後にノーベル物理学賞

- 放射能の発見：ベクレル（1896 年）、後にノーベル物理学賞
  ウランが X 線以外の放射線（α 線 $=$ ^{4}He 原子核）を出す

- 原子核の発見：ラザフォード（1911 年、実験はガイガーとマースデン）、ノーベル化学賞
  α 線（電荷 $+2$）を金原子に照射し散乱させると、小さい確率で後方散乱（大角度の散乱）が起きる
  $\Rightarrow$ 原子は正電荷が一様に分布（トムソン模型）$\times$
  　中心の小さい領域に正電荷が集まっている**「原子核」**が存在（ラザフォード模型）○

- ラザフォードの散乱公式（θ は散乱角）
  $$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{1}$$
  $\theta=0$（前方）で最大（発散）、$\theta=\pi$（後方）で最小だが 0 ではない

1.6 ラザフォード散乱（古典論）

- 問題設定
  - α 粒子（電荷 $Ze(Z=2)$、質量 m）と標的原子核（電荷 $Z'e$、質量 ∞）の古典力学での散乱
  - 入射 α の運動量の大きさは p、エネルギーは $E=p^2/(2m)$
  - 標的原子核を原点とした 2 次元極座標 (r,ϕ)（図 2 参照、方位角については対称的）
  - α が入射する方向を $\phi=0$、散乱後の方向を $\phi=\phi'$
    $\rightarrow$ 散乱角（始状態と終状態の運動量ベクトルの間の角）は $\theta=\pi-\phi'$
  - 衝突係数 b：無限遠での α 粒子の速度ベクトルと標的の距離

- 古典力学の計算が（偶然）量子論での計算と同じ結果（次節で確認）
  $\rightarrow$ 量子力学の成立以前に原子核の存在が明らかになった

- α 粒子の運動は斥力の $1/r$ ポテンシャル問題（相互作用の符号が異なるケプラー問題）

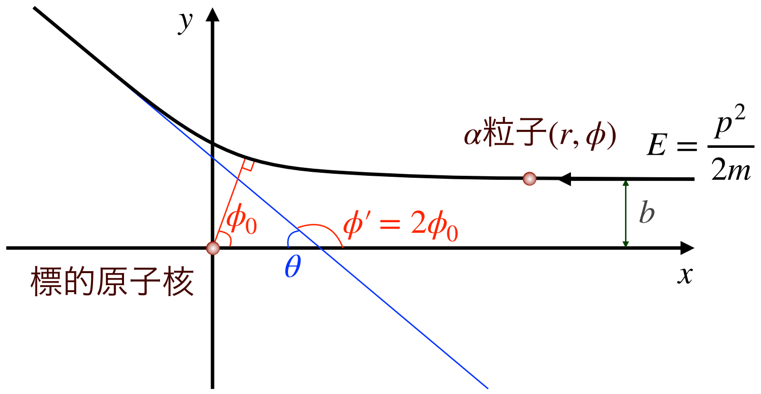

図 2: ラザフォード散乱の模式図。

- r 方向の運動方程式：

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - \underbrace{\frac{L^2}{mr^3}}_{\text{遠心力}} = \underbrace{+\frac{a}{r^2}}_{\text{クーロン}} , \quad a = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2}$$

中心力なので角運動量 $L = pb$ は保存

- 粒子の軌道（ϕ_0 は最近接の時の角度）：

$$r(\phi) = \frac{(pb)^2}{am}\frac{\cos\phi_0}{\cos(\phi-\phi_0)-\cos\phi_0} \tag{3}$$

- 衝突係数 b と散乱角 $\theta = \pi - 2\phi_0$ の関係

$$b = \frac{a}{2E\tan(\theta/2)} \tag{4}$$

衝突係数 b が小さい時に散乱角が大きくなる

- 散乱断面積 σ：

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = 2\pi b db \tag{5}$$

N：入射方向に単位時間・単位面積あたりに通過する α 粒子の数
dN：衝突係数が $b + db$ の円環を通過する α 粒子の数
散乱角 θ が衝突係数 b と一対一対応するので（絶対値は db と $d\theta$ の方向の調整）

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{6}$$

- ラザフォードの散乱公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ZZ'e^2}{(4\pi\varepsilon_0)4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{7}$$

問題 1.3
以下の手順でラザフォード散乱の公式の導出を確認せよ。
1) 運動方程式 (2) で $u = 1/r$ と書き直し、角運動量保存を用いて u の ϕ に対する微分方程式を導け。
2) 微分方程式を境界条件（$\phi = 0$ と $\phi = 2\phi_0$ で $r \to \infty$）で解き式 (3) を導け。
3) 衝突係数が $b = \lim_{\phi\to 0} r(\phi)\sin\phi$ であることを利用して (4) を導け。
4) 式 (4) から $db/d\theta$ を計算し、式 (6) と $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$（方位角について対称）を用いて式 (7) を導け。
