量子力学 II レポート課題［第 3 回］提出期限：2023.5.31（2023.5.24 出題）

学修番号・名前 ______________________

結果だけでなく**途中の式と説明も書くこと**。

直交座標変数 (x, y, z) と極座標変数 (r, θ, ϕ) の関係は

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

と与えられ、極座標変数の直交座標変数による微分は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

である。角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}$ は、

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

と与えられ、球面調和関数の $\ell = 1, m = -1$ の場合の具体形 $Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ は

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$

である。次の問に答えよ。

1. $\hat{L}_z$ を極座標表示せよ。
2. $Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ が $\hat{L}_z$ および $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有関数になっていることを確かめ、それぞれの固有値を求めよ。

講義についての質問や、ご意見ご要望があれば末尾に書いてください。