

量子力学II演習問題 [第9回] 提出の必要なし

スピン $s = 1/2$ の状態で可能な m_s の値は $+1/2$ または $-1/2$ であり、 $m_s = +1/2$ の状態を $|\uparrow\rangle$ 、 $m_s = -1/2$ の状態を $|\downarrow\rangle$ と表記することになると、2成分スピノルを用いて

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかける。パウリ行列 σ を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義する。問題6.,7.以外はスピン $1/2$ 状態を扱うものとする。次の問いに答えよ。

- 2成分スピノルに作用するスピン演算子 \hat{s} は $\hat{s} = \sigma/2$ (x, y, z が $1, 2, 3$ に対応) として行列表示できる。この定義を用いて \hat{s}_z 、 $\hat{s}_- = \hat{s}_x - i\hat{s}_y$ 、 $\hat{s}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ を 2×2 行列表示せよ。
- 行列の計算を実行して $\hat{s}^2|\downarrow\rangle = \frac{3}{4}|\downarrow\rangle$ 、 $\hat{s}_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle$ 、 $\hat{s}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ を示せ。
- スピンの z 軸上向き状態 $|\uparrow\rangle$ の \hat{s}_x の期待値 $\langle\uparrow|\hat{s}_x|\uparrow\rangle$ を計算せよ。
- 状態 $|\uparrow\rangle$ の x 方向の揺らぎ $(\Delta s_x)^2 = \langle\uparrow|\hat{s}_x^2|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\hat{s}_x|\uparrow\rangle^2$ を計算せよ。
- 任意の方向 (θ, ϕ) を向いたスピン状態は

$$|\sigma\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

で表される。スピンの x 軸正の方向 (つまり $\theta = \pi/2, \phi = 0$) を向いた状態を $|x+\rangle$ として、 $\langle x+|\hat{s}_x|x+\rangle$ を計算せよ。

- スピン $s = 1$ 、 $m_s = +1$ の状態 $|1, +1\rangle$ と、スピン 1 の場合のスピン演算子 \hat{s}_x は

$$|1, +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と与えられる。状態 $|1, +1\rangle$ での \hat{s}_x の期待値 $\langle 1, +1|\hat{s}_x|1, +1\rangle$ を計算せよ。

- 状態 $|1, +1\rangle$ での \hat{s}_x の揺らぎ $(\Delta s_x)^2 = \langle 1, +1|\hat{s}_x^2|1, +1\rangle - \langle 1, +1|\hat{s}_x|1, +1\rangle^2$ を計算せよ。