量子力学II演習問題［第8回］提出の必要なし

---

1. 3次元位置演算子 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ と運動量演算子 $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ の交換関係は $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ であり、他の組み合わせは全て0である。角運動量演算子

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \qquad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \qquad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x,$$

   が交換関係 $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$ および $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$ を満たすことを示せ。

2. 無次元の角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{L}}/\hbar$ を定義すると、交換関係は

$$[\hat{j}_x, \hat{j}_y] = i\hat{j}_z, \qquad [\hat{j}_y, \hat{j}_z] = i\hat{j}_x, \qquad [\hat{j}_z, \hat{j}_x] = i\hat{j}_y$$

   となる。$\hat{\boldsymbol{j}}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$ が、$\hat{j}_x$ および $\hat{j}_y$ と交換可能であること、つまり $[\hat{\boldsymbol{j}}^2, \hat{j}_x] = [\hat{\boldsymbol{j}}^2, \hat{j}_y] = 0$ を示せ。

3. 生成消滅演算子

$$\hat{j}_+ = \hat{j}_x + i\hat{j}_y, \qquad \hat{j}_- = \hat{j}_x - i\hat{j}_y$$

   を定義し、交換関係 $[\hat{j}_+, \hat{j}_-]$、$[\hat{j}_z, \hat{j}_+]$、$[\hat{\boldsymbol{j}}^2, \hat{j}_+]$ を計算せよ。

4. 演算子 $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ が

$$\hat{\boldsymbol{j}}^2 = \hat{j}_+\hat{j}_- - \hat{j}_z + \hat{j}_z^2 = \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z + \hat{j}_z^2$$

   と表せることを示せ。

5. $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ と $\hat{j}_z$ の規格化された同時固有状態を $|\,\lambda, m\,\rangle$ とする。つまり $\hat{\boldsymbol{j}}^2|\,\lambda, m\,\rangle = \lambda|\,\lambda, m\,\rangle$、$\hat{j}_z|\,\lambda, m\,\rangle = m|\,\lambda, m\,\rangle$、$\langle\,\lambda, m\,|\,\lambda, m\,\rangle = 1$ である。3. の結果を用いて、生成演算子 $\hat{j}_+$ を作用させた状態 $\hat{j}_+|\,\lambda, m\,\rangle$ の $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ および $\hat{j}_z$ の固有値を求めよ。

6. $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ の期待値の計算から、λ は非負であり、m の値に上限と下限があることが示される。m の最大値を j とした場合、$m = j$ の状態 $|\,\lambda, j\,\rangle$ はそれ以上 m を増やせないことから $\hat{j}_+|\,\lambda, j\,\rangle = \mathbf{0}$ を満たす。状態 $|\,\lambda, j\,\rangle$ の $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ の固有値 λ を j を用いて表せ。

7. 5. と同様の計算で、消滅演算子 $\hat{j}_-$ を作用させた状態 $\hat{j}_-|\,\lambda, m\,\rangle$ の $\hat{j}_z$ の固有値は $m-1$ であることがわかる。状態 $|\,\lambda, j\,\rangle$ に $\hat{j}_-$ を作用させると $m = j-1, j-2, \cdots$ の状態が作られるが、m に下限があるためには、$\hat{j}_-$ を n 回作用させて固有値が $m = j-n$ となった状態が $\hat{j}_-|\,\lambda, j-n\,\rangle = \mathbf{0}$ を満たす必要がある。状態 $|\,\lambda, j-n\,\rangle$ の $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ の固有値 λ を j と n を用いて表し、6. の結果と合わせて n と j の関係を導け。

8. m の最大値が j のとき、固有値 λ と m の可能な値を j を用いて表し、$j = 2$ の場合と $j = 3/2$ の場合に可能な m の値を全て挙げよ。
