

## 量子力学II演習問題 [第6回] 提出の必要なし

質量  $\mu$  の粒子に対する三次元中心力ポテンシャル  $V(r)$  を考える。ただしポテンシャルは  $r \rightarrow 0$  で  $V(r) \sim r^{-2+\epsilon}$  ( $\epsilon > 0$ ) と振る舞うとする。波動関数は  $\psi_{\ell,m}(\mathbf{r}) = R_{\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$  と変数分離でき、動径方向の波動関数  $R_{\ell}(r)$  の満たすべき微分方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [rR_{\ell}(r)] + \left[ V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R_{\ell}(r) = ER_{\ell}(r)$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

1.  $R_{\ell}(r) = \frac{u_{\ell}(r)}{r}$  とすることで得られる  $u_{\ell}(r)$  に対する微分方程式を求めよ。
2.  $\ell \neq 0$  の場合に、原点  $r = 0$  付近では運動項と遠心力ポテンシャルが支配的になる。 $u_{\ell}(r)$  の原点付近の振る舞いを  $u_{\ell}(r) \sim r^s$  として調べ、許される  $s$  の値と  $u_{\ell}(r = 0)$  の値を答えよ。
3. 以下、半径  $b$  の無限に高い球対称井戸型ポテンシャルを考える。

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq b) \\ \infty & (b < r) \end{cases}$$

$\ell = 0$  の場合に、井戸の中 ( $0 \leq r \leq b$ ) での動径波動関数  $u_0(r)$  の満たすべき微分方程式を求め、一般解 (境界条件を与える前の解) を示せ。

4.  $r = 0$  での境界条件は  $\ell = 0$  の場合でも 2. の解と同じになる。 $r = 0$  と  $r = b$  で  $u_0(r)$  の満たすべき境界条件を示せ。
5.  $\sin(z) = 0$  となる  $z$  (関数の零点と呼ばれる) を整数  $n$  を用いてあらわし、境界条件から  $\ell = 0$  の場合のエネルギー固有値を求めよ。
6. 一般の  $\ell$  の場合に、井戸の中 ( $0 \leq r \leq b$ ) の微分方程式を考える。 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$  として変数を  $r$  から  $z = kr$  に変数変換し、 $R_{\ell}(z)$  に関する微分方程式を求めよ。
7. 前問の方程式の一般解は球ベッセル関数  $j_{\ell}(z)$  と球ノイマン関数  $n_{\ell}(z)$  の線型結合で与えられる。 $R_{\ell}(r)$  の  $r = 0$  と  $r = b$  での境界条件を示し、 $j_{\ell}(z)$  の零点  $z_{n,\ell}$  ( $z_{n,\ell}$  の値が小さい零点から順に  $n = 1, 2, \dots$  とラベルする) を用いて一般の固有エネルギー  $E_{n,\ell}$  を表せ。
8.  $\ell = 0$  の球ベッセル関数  $j_0(z)$  の零点は  $z_{n,0} = n\pi$  ( $n$  は自然数) で与えられる。7. の結果を用いて  $\ell = 0$  の固有エネルギーを計算し、5. の結果と一致することを示せ。