量子力学 II 演習問題［第 3 回］提出の必要なし

調和振動子型ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンは、生成消滅演算子 $\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ を用いて、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

と表される。ここで、生成消滅演算子と数演算子 $\hat{n}$ は

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right), \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

で定義され、交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

を満たす。数演算子 $\hat{n}$ の固有値は非負の整数であることが知られている。数演算子 $\hat{n}$ の固有値 n に対する規格化された固有状態を $|\, n\,\rangle$ と表すと、生成消滅演算子の作用は

$$\hat{a}|\, n\,\rangle = \sqrt{n}|\, n-1\,\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|\, n\,\rangle = \sqrt{n+1}|\, n+1\,\rangle, \quad \langle\, \ell\,|\, n\,\rangle = \delta_{\ell n}$$

となる。状態 $|\, n\,\rangle$ の座標表示の波動関数 $\phi_n(x)$ と、$\langle\, x\,|$ への演算子の作用は

$$\phi_n(x) = \langle\, x\,|\, n\,\rangle, \quad \langle\, x\,|\hat{x} = x\langle\, x\,|, \quad \langle\, x\,|\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle\, x\,|$$

である。ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を用いて良い。次の問に答えよ。

1. 数演算子 $\hat{n}$, 生成消滅演算子 $\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ の行列要素 $\langle\, \ell\,|\hat{n}|\, n\,\rangle$、$\langle\, \ell\,|\hat{a}|\, n\,\rangle$、$\langle\, \ell\,|\hat{a}^\dagger|\, n\,\rangle$ を計算せよ。
2. ハミルトニアンの行列要素 $\langle\, \ell\,|\hat{H}|\, n\,\rangle$ の一般形を計算し、ℓ, n について $0, 1, 2, 3$ までの具体形を 4 行 4 列の行列として書け。
3. 座標演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を生成消滅演算子 $\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。
4. 行列要素 $\langle\, \ell\,|\hat{x}|\, n\,\rangle$、$\langle\, \ell\,|\hat{p}|\, n\,\rangle$ の一般形を計算せよ。
5. 状態 $|\, n\,\rangle$ に対する $\hat{x}^2$ の期待値 $\langle\, n\,|\hat{x}^2|\, n\,\rangle$ と $\hat{p}^2$ の期待値 $\langle\, n\,|\hat{p}^2|\, n\,\rangle$ を計算せよ。
6. 状態 $|\, n\,\rangle$ に対する不確定性関係 $\Delta x\Delta p$ を計算せよ。ここで、$\Delta x = \sqrt{\langle\, n\,|\hat{x}^2|\, n\,\rangle - \langle\, n\,|\hat{x}|\, n\,\rangle^2}$、$\Delta p = \sqrt{\langle\, n\,|\hat{p}^2|\, n\,\rangle - \langle\, n\,|\hat{p}|\, n\,\rangle^2}$ である。
7. $\langle\, x\,|\hat{a}|\, 0\,\rangle = \mathbf{0}$ から基底状態（$n=0$）の波動関数 $\phi_0(x)$ に関する微分方程式を導き、基底状態の波動関数を求め規格化せよ。
8. 座標表示で $\langle\, 0\,|\hat{x}^2|\, 0\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2|\phi_0(x)|^2$ を計算し 5. の結果と一致することを示せ。
