量子力学 II 演習問題［第 2 回］提出の必要なし

調和振動子型ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンは、位置と運動量の演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ を用いて、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

で与えられる。$\hat{x}$ と $\hat{p}$ には $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ の交換関係がある。次の問に答えよ。

1. 生成消滅演算子

   $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}\right)$$

   を用いることで、ハミルトニアンが以下のように書けることを示せ。

   $$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

2. 数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ がエルミート演算子であることを示せ。
3. 生成消滅演算子に対する交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を計算せよ。
4. 数演算子 $\hat{n}$ と消滅演算子 $\hat{a}$ の交換関係 $[\hat{n}, \hat{a}]$ を計算せよ。
5. 数演算子 $\hat{n}$ の固有値 λ を持つ固有状態を $|\,\lambda\,\rangle$ とする。λ が非負（0 か正）の実数であることを示せ。
6. 状態 $\hat{a}|\,\lambda\,\rangle$ が、固有値 $\lambda - 1$ を持つ $\hat{n}$ の固有状態であることを示せ。
7. 前問の結果より定数 N_λ を用いて、$\hat{a}|\,\lambda\,\rangle = N_\lambda|\,\lambda - 1\,\rangle$ と書ける。状態の規格化より、N_λ を決定せよ。ただし $N_\lambda \geq 0$ とする。
8. $\hat{n}$ の固有値が非負の整数であることを用いて、ハミルトニアンの固有値を求めよ。
