

量子力学 II 演習問題 [第 12 回] 提出の必要なし

非摂動ハミルトニアン \hat{H}_0 の固有状態と固有エネルギーを $|n\rangle_0$ と $E_n^{(0)}$ とし (つまり $\hat{H}_0|n\rangle_0 = E_n^{(0)}|n\rangle_0$)、固有エネルギーに縮退はないとする。固有状態は規格直交化 (つまり ${}_0\langle m|n\rangle_0 = \delta_{mn}$) されており、完全である (つまり $\sum_m |m\rangle_0 {}_0\langle m| = \hat{1}$)。摂動項 $\lambda\hat{V}$ を加えたハミルトニアン \hat{H} とシュレディンガー方程式は

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}, \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

で与えられる。 $|n\rangle$ と E_n は厳密な固有状態と固有エネルギーであり、 λ のべきで展開される：

$$|n\rangle = |n\rangle_0 + \lambda|n\rangle_1 + \lambda^2|n\rangle_2 + \dots, \quad E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

m と n の区別に注意して以下の問いに答えよ。

1. 任意の状態 $|\phi\rangle$ が非摂動ハミルトニアンの固有状態 $|m\rangle_0$ の線型結合で書けることを示せ。
2. シュレディンガー方程式に $|n\rangle$ と E_n の展開を代入し、 λ^1 と λ^2 の係数から次の式を示せ。

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}_0)|n\rangle_1 = (\hat{V} - E_n^{(1)})|n\rangle_0 \quad (1)$$

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}_0)|n\rangle_2 = (\hat{V} - E_n^{(1)})|n\rangle_1 - E_n^{(2)}|n\rangle_0 \quad (2)$$

3. 式 (1) に左から ${}_0\langle m|$ をかけて次の式を示せ。

$$(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}){}_0\langle m|n\rangle_1 = {}_0\langle m|\hat{V}|n\rangle_0 - E_n^{(1)}\delta_{mn}$$

4. 3. の結果で $m = n$ とすることで、1 次の摂動での固有エネルギーのずれ $E_n^{(1)}$ を求めよ。
5. 3. の結果で $m \neq n$ として ${}_0\langle m|n\rangle_1$ を計算し、状態 $|n\rangle_1$ を $|m\rangle_0$ の線型結合で表せ。ただし ${}_0\langle n|n\rangle_1 = c$ とする。
6. 式 (2) に左から ${}_0\langle n|$ をかけて 2 次の摂動での固有エネルギーのずれ $E_n^{(2)}$ を $|n\rangle_0$ 、 \hat{V} 、 $E_n^{(1)}$ 、 $|n\rangle_1$ を用いて表せ。
7. 4.、5.、6. の結果を用いて $E_n^{(2)}$ を \hat{V} と非摂動ハミルトニアンの固有状態と固有エネルギーで表せ。
8. 基底状態に対する 2 次の摂動が 0 または負になることを示せ。