量子力学 II 演習問題［第 11 回］提出の必要なし

スピン 1/2 を持った電子 A と電子 B の系を考える（軌道角運動量は 0 とする）。それぞれのスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{s}}^A$、$\hat{\boldsymbol{s}}^B$ と書くと、合成系のスピン演算子は

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \hat{\boldsymbol{s}}^A + \hat{\boldsymbol{s}}^B$$

で与えられる。$\hat{\boldsymbol{s}}^2$ の固有値を $s(s+1)$、$\hat{s}_3$ の固有値を m_s とする。角運動量 $\hat{\boldsymbol{j}}$ の規格化された固有状態 $|\, j, m\,\rangle$ に対する消滅演算子の作用は

$$\hat{j}_- |\, j, m\,\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|\, j, m-1\,\rangle$$

となる。以下の問いに答えよ。

1. 合成系の可能な状態を電子 A と電子 B のスピン状態の直積表現で表し、m_s の値で分類せよ。ただし $s^A = s^B = 1/2$ は省略し $|\, m_s^A = +1/2, m_s^B = -1/2\,\rangle = |\,\uparrow^A, \downarrow^B\,\rangle$ のように表記する。
2. 合成系のスピンの大きさ s および第 3 成分 m_s のとり得る値を調べ、$|\, s, m_s\,\rangle$ で表現した状態の数が 1. の結果と一致することを示せ。
3. m_s 最大の状態は $|\, s, m_s\,\rangle = |\, 1, 1\,\rangle$ となる。m_s の値から、直積表現では $|\, 1, 1\,\rangle = |\,\uparrow^A, \uparrow^B\,\rangle$ であることがわかる。両辺に消滅演算子 $\hat{s}_- = \hat{s}_-^A + \hat{s}_-^B$ を作用させ、状態 $|\, 1, 0\rangle$ を直積表現で表せ。
4. 状態 $|\, 1, 0\,\rangle$ に消滅演算子 $\hat{s}_-$ を作用させ、状態 $|\, 1, -1\,\rangle$ を直積表現で表せ。
5. 状態 $|\, 1, 1\,\rangle$ の直積表現に演算子 $\hat{s}_3 = \hat{s}_3^A + \hat{s}_3^B$ を作用させ、固有値が $+1$ であることを確認せよ。
6. 状態 $|\, 1, 0\,\rangle$ の直積表現に演算子 $\hat{s}_3$ を作用させ、固有値が 0 であることを確認せよ。

一般の角運動量 j^A と j^B を合成し大きさ j、第 3 成分 m の角運動量を作る。

7. $j^A = 1$ と $j^B = 1/2$ の合成でできる状態を直積表現と $|\, j, m\rangle$ 両方で書き出せ。
8. メソンはスピン 1/2 のクォークとスピン 1/2 の反クォークの複合系、バリオンはクォーク 3 つの複合系である。基底状態は軌道角運動量を持たないとした場合、基底状態のメソンの持つスピン（複合系の全角運動量）および基底状態バリオンの持つスピンの可能な大きさを求めよ。
