量子力学 II 演習問題［第 10 回］提出の必要なし

一様磁場中の荷電粒子（電荷 Q、質量 m_Q、スピンなし）の量子力学を考える。磁場と軌道角運動量の相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\text{軌道}}$ と、一様磁場 $\boldsymbol{B}$ に対するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$\hat{H}_{\text{軌道}} = -\frac{Q}{2m_Q}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\hat{\boldsymbol{p}}), \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$$

と書くことができる。以下の問いに答えよ。

1. 一様磁場が z 方向を向いている（つまり $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$）とき、上記のようにとったベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の x, y, z 成分をそれぞれ書け。
2. 演算子の座標表示を用いて次の式を示せ。ただし第 2 項の $\boldsymbol{\nabla}$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ にのみ作用する。

$$\hat{H}_{\text{軌道}}\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{i\hbar Q}{m_Q}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) + \frac{i\hbar Q}{2m_Q}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r})$$

3. 一様磁場の場合に $\hat{H}_{\text{軌道}}$ を磁場 $\boldsymbol{B}$ と軌道角運動量演算子を用いて表せ。

スピン 1/2 の粒子が磁場 $\boldsymbol{B}$ と

$$\hat{H}_{\text{スピン}} = -\hbar\gamma_s\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}$$

という相互作用をしている。時刻 t でのスピン状態 $|\,\sigma(t)\,\rangle = c_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + c_\downarrow(t)|\downarrow\rangle$ の時間発展は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\sigma(t)\,\rangle = \hat{H}_{\text{スピン}}|\,\sigma(t)\,\rangle \tag{1}$$

で与えられる。$|\uparrow\rangle$ などの定義は講義ノートと同じとする。以下の問いに答えよ。行列表示は使っても使わなくても良い。

4. 磁場が $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ のとき、$\hat{H}_{\text{スピン}}|\uparrow\rangle$、$\hat{H}_{\text{スピン}}|\downarrow\rangle$ を計算しそれぞれの状態の固有エネルギー $E_\uparrow$、$E_\downarrow$ を求めよ。
5. 式 (1) に左から $\langle\downarrow|$ を作用させ、$c_\downarrow(t)$ に対する微分方程式を求めよ。
6. 微分方程式を解いて $c_\downarrow(t)$ を求めよ。ただし $t = 0$ ときの値 $c_\downarrow(0)$ を用いて積分定数を決定せよ。
7. $c_\uparrow(t)$ の解は $c_\downarrow(t)$ の解で $E_\downarrow \to E_\uparrow$、$c_\downarrow(0) \to c_\uparrow(0)$ と置き換えたものになる。4. で計算した固有エネルギーの具体形を用いて、$t = 0$ で角度 θ 方向（初期角度 $\phi = 0$ とする）を向いたスピン状態 $c_\uparrow(0) = \cos\frac{\theta}{2}$、$c_\downarrow(0) = \sin\frac{\theta}{2}$ の、時刻 t での y 方向成分の期待値 $\langle\,\sigma(t)\,|\hat{s}_y|\,\sigma(t)\,\rangle$ を計算せよ。
8. 同じ初期状態について、時刻 t での z 方向成分の期待値 $\langle\,\sigma(t)\,|\hat{s}_z|\,\sigma(t)\,\rangle$ を計算せよ。
