量子力学 II 演習問題［第 1 回］提出の必要なし

空間 1 次元のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,t) \tag{1}$$

で与えられる。演算子 $\hat{O}$ のエルミート共役 $\hat{O}^\dagger$ の定義は

$$\int dx[\psi_a(x,t)]^*\hat{O}\psi_b(x,t) = \int dx[\hat{O}^\dagger\psi_a(x,t)]^*\psi_b(x,t)$$

である。2 成分ベクトル空間の基底ベクトル $|\, e_1 \,\rangle, |\, e_2 \,\rangle$ を

$$|\, e_1 \,\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\, e_2 \,\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義する。次の問に答えよ。

1. 位置演算子と運動量演算子の座標表示 $\hat{x} = x$、$\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ を用いて演算子の関係式 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を示せ。

2. $\psi_a(x,t), \psi_b(x,t)$ がそれぞれ式 (1) を満たすとき、それらの線型結合 $\psi(x,t) = c_a\psi_a(x,t)+c_b\psi_b(x,t)$ も式 (1) を満たすことを示せ。ここで c_a, c_b は任意の複素数とする。

3. 運動量演算子 $\hat{p}$ がエルミートであること、つまり演算子の関係式として $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$ を示せ。ただし波動関数は積分の境界で消えるものとする。

4. 2 つの演算子 $\hat{A}$、$\hat{B}$ の積のエルミート共役が $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ となることを示せ。

5. 式 (1) のハミルトニアン $\hat{H}$ が時間に依存しない場合に、$\psi(x,t) = \phi(x)T(t)$ を代入して $T(t)$ の解を求め、$\phi(x)$ が従う方程式を導け。

6. 2 成分ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と 2×2 行列 $\hat{A}$ に対し、エルミート共役の定義 $(\boldsymbol{a}, \hat{A}\boldsymbol{b}) = (\hat{A}^\dagger\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を用いて $\hat{A}^\dagger$ が $\hat{A}$ の転置複素共役になっていることを示せ。

7. 基底の完全性 $\sum_i |\, e_i \,\rangle\langle\, e_i \,| = \hat{1}$ を示せ。

8. $\hat{A}$、$\hat{B}$、$\hat{C}$ を演算子とする。以下の関係式を示せ。

$$[\hat{A}, \hat{A}] = 0, \quad [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}], \quad [\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$
$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}], \quad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$
