生成消滅演算子

調和振動子の生成消滅演算子 (50)、(51) に対する一つの考え方。

古典力学の調和振動子のハミルトニアン（ここでは x, p は演算子ではない）から $\hbar\omega$ をくくり出すと

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\
&= \hbar\omega\left(\frac{p^2}{2\hbar m\omega} + \frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \\
&= \hbar\omega\frac{1}{2\hbar}\left[\left(\sqrt{m\omega}x\right)^2 + \left(\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)^2\right] \\
&= \hbar\omega\frac{1}{2\hbar}\left[\left(\sqrt{m\omega}x\right)^2 - \left(i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)^2\right] \\
&= \hbar\omega\frac{1}{2\hbar}\left[\left(\sqrt{m\omega}x\right) - \left(i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)\right]\left[\left(\sqrt{m\omega}x\right) + \left(i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)\right] \\
&= \hbar\omega\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)}_{\sim a^\dagger}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right)}_{\sim a}
\end{aligned}
$$

のように形式的に因数分解できる。分解した各項はそれぞれ生成消滅演算子と同じ形をしている。つまり生成消滅演算子はハミルトニアンから $\hbar\omega$ をくくり出して “因数分解” して得たものと考えることができる。ただし演算子にすると $\hat{x}$ と $\hat{p}$ が交換しないため、ハミルトニアンとの関係に $+1/2$ の項が出ることに注意。

数演算子の固有値が非縮退であること

調和振動子の計算で $\hat{n}(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle) = (\lambda-1)(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle)$ から $\hat{a}|\,\lambda\,\rangle = N_\lambda|\,\lambda-1\,\rangle$ とできることの説明。

$\hat{n}(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle) = (\lambda-1)(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle)$ から厳密にいえることは「状態 $(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle)$ の $\hat{n}$ の固有値は $\lambda-1$ である」ということで、これが $|\,\lambda-1\,\rangle$（固有値は $\lambda-1$）の定数倍になるためには、数演算子 $\hat{n}$ の**固有値が非縮退（縮退がない）である**という条件が必要である。固有値が非縮退の意味は、ある固有値を持った固有ベクトルは定数倍を除いて一意的（ひとつしかない）ということである。非縮退であれば、$(\hat{a}|\,\lambda\,\rangle)$ と $|\,\lambda-1\,\rangle$ は線形従属（比例関係）になるので、$\hat{a}|\,\lambda\,\rangle = N_\lambda|\,\lambda-1\,\rangle$ とかけることが従う。

縮退の具体例として、行列 $\hat{A}$ とベクトル $|\,a\,\rangle, |\,b\,\rangle$ を

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |\,a\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\,b\,\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$\hat{A}|\,a\,\rangle = 1|\,a\,\rangle, \quad \hat{A}|\,b\,\rangle = 1|\,b\,\rangle$$

なので $|\,a\,\rangle$ と $|\,b\,\rangle$ はどちらも $\hat{A}$ の固有値 1 の固有ベクトルであるが、$|\,a\,\rangle$ と $|\,b\,\rangle$ は線形独立、つまり $c_1|\,a\,\rangle + c_2|\,b\,\rangle = \mathbf{0}$ となるのは $c_1 = c_2 = 0$ しかない。この場合は、同じ固有値を持つ固有ベクトルが 2 つあるので、固有値 1 は縮退しているという。定数 α に対して $|\,a\,\rangle \neq \alpha|\,b\,\rangle$ から明らかなように、縮退がある場合は、固有値が同じでも固有ベクトルが定数倍になるとは限らない。

調和振動子の数演算子の固有値が非縮退であることは、以下の 2 通りの方法で示すことができる。比較的簡単に示すには、

- 1 次元量子力学の束縛状態の波動関数は非縮退

という性質を利用することができる[3]。この性質自体は、例えば国広悌二「量子力学」(東京図書)p.22 などで説明されている。調和振動子の場合、数演算子 $\hat{n}$ とハミルトニアンの固有状態が同じ（§2.5）であり、ハミルトニアンの固有状態は 1 次元量子力学の束縛状態（無限遠で波動関数が 0 になる状態）であるので、上記の性質が使え、$\hat{n}$ の固有状態が非縮退であることがわかる。もっと直接に

- 数演算子 $\hat{n}$ の固有状態は非縮退

も示すことができるが（例えば清水明「新版 量子論の基礎」(サイエンス社)p.178 参照）、導出には状態空間についてのやや高度な知識が必要となる（同書内で解説されている）。

[3] 空間 1 次元以外の場合はこの性質は成り立たない。実際に §3 で扱うように空間 3 次元では角運動量による固有値の縮退が生じる。