直積

演算子と状態の直積（テンソル積）の説明。

直感的な理解：記号 $\otimes$ の前と後ろに独立なベクトルと演算子があり、$\otimes$ の前後でそれぞれ演算を行う。固有値などはそれぞれの積になる。

位置ベクトルの具体例：位置 $\boldsymbol{r}^A$ に質点 A、位置 $\boldsymbol{r}^B$ に質点 B がある 2 質点系を考える。質点 A の位置と質点 B の位置は独立に選べるので、全系の状態は、直積

$$\boldsymbol{r}^{AB} \equiv \boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B = \begin{pmatrix} r_1^A \\ r_2^A \\ r_3^A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_1^B \\ r_2^B \\ r_3^B \end{pmatrix}$$

で指定できる。成分表示では

$$[\boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B]_{ij} = r_i^A r_j^B$$

と書かれ、i, j はそれぞれ独立に 1,2,3 の値を取れるので 9 個の成分がある。独立なベクトルを並べて積をとったものをテンソルと呼び、2 個のベクトルのテンソル積は 2 階テンソル、n 個のベクトルのテンソル積は n 階テンソルと呼ばれる。3×3 直交行列 R_A を用いて位置ベクトル $\boldsymbol{r}^A$ を

$$\boldsymbol{r}^A \to \boldsymbol{r}^{A\prime} = R^A \boldsymbol{r}^A = \begin{pmatrix} R_{11}^A & R_{12}^A & R_{13}^A \\ R_{21}^A & R_{22}^A & R_{23}^A \\ R_{31}^A & R_{32}^A & R_{33}^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^A \\ r_2^A \\ r_3^A \end{pmatrix}$$

と変換すると、質点 A の座標を回転させることができる。R^A は位置 $\boldsymbol{r}^A$ にある状態を回転させる演算子とみなすことができる。同様に $\boldsymbol{r}^B$ の回転は

$$\boldsymbol{r}^B \to \boldsymbol{r}^{B\prime} = R^B \boldsymbol{r}^B$$

である。質点 A と質点 B は独立に回転できるので、それぞれの座標の任意の回転は、直積

$$R^{AB} \equiv R^A \otimes R^B$$

で表現できる。直積状態の変換は

$$R^{AB} \boldsymbol{r}^{AB} = R^A \boldsymbol{r}^A \otimes R^B \boldsymbol{r}^B = \boldsymbol{r}^{A\prime} \otimes \boldsymbol{r}^{B\prime}$$

となり、変換後の状態は質点 A が R^A で、質点 B が R^B でそれぞれ回転されたものになる。変換後の状態との内積をとると、

$$(\boldsymbol{r}^{A\prime} \otimes \boldsymbol{r}^{B\prime}) \cdot (\boldsymbol{r}^A \otimes \boldsymbol{r}^B) = \sum_{i,j} r_i^{A\prime} r_j^{B\prime} r_i^A r_j^B = \sum_i r_i^{A\prime} r_i^A \sum_j r_j^{B\prime} r_j^B = (\boldsymbol{r}^{A\prime} \cdot \boldsymbol{r}^A)(\boldsymbol{r}^{B\prime} \cdot \boldsymbol{r}^B)$$

と、それぞれの内積（スカラー）の積になる。上記をスピンなどのベクトル空間に一般化したものも同様に直積（テンソル積）と呼ぶ。