第４回の計算の補足

- 式 (38)、(39)：$|x+\rangle$、$|x-\rangle$ の規格直交性の確認

  それぞれのブラベクトルは

$$\langle x-| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \langle x-| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  であるので、同じベクトルの内積を計算すると

$$\langle x+|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times(1+1) = 1$$

$$\langle x-|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times[1+(-1)\times(-1)] = 1$$

  と規格化されていることがわかる。また、異なるベクトルの内積を計算すると

$$\langle x+|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times(1-1) = 0$$

$$\langle x-|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times(1-1) = 0$$

  と直交していることがわかる。

- $\hat{s}_y$ の固有状態

  y 軸方向を向いたスピン 1/2 状態（$\hat{s}_y$ の固有状態）は

$$|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

  で与えられる。実際に

$$\hat{s}_y|y+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0+(-i)i \\ i+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|y+\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_y|y-\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0+(-i)(-i) \\ i+0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|y-\rangle\end{aligned}$$

  と $|y+\rangle$ は固有値 $+1/2$、$|y-\rangle$ は固有値 $-1/2$ を持つ固有状態であることがわかる。

- 式 (51)、(52)：スピン演算子の交換関係

式を代入すると

$$
\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{s}}^2, \hat{s}_z] &= \hat{\boldsymbol{s}}^2\hat{s}_z - \hat{s}_z\hat{\boldsymbol{s}}^2 = \frac{1}{4}I\ \hat{s}_z - \hat{s}_z\ \frac{1}{4}I = \frac{1}{4}\hat{s}_z - \frac{1}{4}\hat{s}_z = 0 \\
[\hat{s}_x, \hat{s}_z] &= \hat{s}_x\hat{s}_z - \hat{s}_z\hat{s}_x \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i\hat{s}_y
\end{aligned}
$$

となる。ここで I は 2×2 単位行列をあらわす。

- 位置と運動量の交換関係 (54)

  式 (61) の表示の演算子が波動関数 $\psi(x)$ に作用しているとすると

$$
\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi(x) \\
&= x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x) - \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)[x\psi(x)] \\
&= -i\hbar x\frac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar\left(\frac{d}{dx}x\right)\psi(x) + i\hbar x\frac{d\psi(x)}{dx} \\
&= i\hbar\psi(x)
\end{aligned}
$$

  となる。これが任意の $\psi(x)$ に対して成立するので、演算子の関係式として $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ が成り立つ。演算子の関係式の計算では、作用する対象（上の例では波動関数）を具体的に書くと間違えにくい。特に微分演算子は右にある関数を全てにかかるので、$\hat{p}\hat{x}\psi(x)$ は $x\psi(x)$ の積の微分になる。交換関係右辺の $i\hbar$ は正確には $i\hbar\hat{I}$ と恒等演算子 $\hat{I}$ が省略されている。