第３回の計算の補足

- 「固有ベクトルは定数倍しても同じ固有値を持つ」の説明

  $\hat{A}|x\rangle = \lambda|x\rangle$ となる $\hat{A}$ の固有ベクトル $|x\rangle$ を定数 c 倍したベクトルを

  $$|y\rangle = c|x\rangle$$

  とする。このとき、

  $$\hat{A}|y\rangle = \hat{A}(c|x\rangle) = c\hat{A}|x\rangle = c\lambda|x\rangle = \lambda(c|x\rangle) = \lambda|y\rangle$$

  であるので、$|y\rangle$ は $\hat{A}$ の固有値 λ の固有ベクトルである。つまり固有ベクトルを定数倍しても固有値は変わらない。

- ベクトルの規格化の説明

  規格化されていない任意のベクトル $|a\rangle$ から

  $$|\tilde{a}\rangle = \frac{|a\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}$$

  を定義する。$\sqrt{\langle a|a\rangle}$ が定数であることに注意。このベクトル $|\tilde{a}\rangle$ は規格化されている。実際、

  $$\langle\tilde{a}| = \frac{\langle a|}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}$$

  なので

  $$\langle\tilde{a}|\tilde{a}\rangle = \left(\frac{\langle a|}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}\right)\left(\frac{|a\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}\right)\frac{\langle a|a\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}\sqrt{\langle a|a\rangle}} = 1$$

  となる。つまり任意のベクトル $|a\rangle$ から規格化されたベクトル $|\tilde{a}\rangle$ を作ること（「$|a\rangle$ を規格化する」という）ができる。$|a\rangle$ と $|\tilde{a}\rangle$ の違いは定数倍のみなので、上の説明より規格化しても固有値は変わらない。

- スピン演算子の２乗

  定義式 (27) より

  $$\hat{s}_x^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
  $$\hat{s}_y^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(-i)i & 0\\ 0 & i(-i)\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
  $$\hat{s}_z^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1^2 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

  となる。$\hat{s}_z$ の計算には対角行列の２乗は各成分の２乗の対角行列になることを用いた。よってこの計算は、パウリ行列の２乗はどの成分でも単位行列になることを表している。