9 連成振動

- 第 9 回〜11 回の目標：媒質中を伝わる振動としての波動
  - 媒質：空間的に連続的に分布する、波動を伝える “物質”（空気、水）
  - 媒質自体は移動せず、ある位置の媒質の振動が隣に伝わることで波動が伝わる
  - 多数の質点の振動として波動方程式を導出する

9.1 1 自由度の振動

- 1 次元の運動、ばね 1、質点、ばね 2（図 21）
- 質点の質量は m、ばね定数は全て k
- つりあいの位置からの変位を x、右向きが正
- 質点への力：ばね 1 から $-kx$、ばね 2 から $-kx$

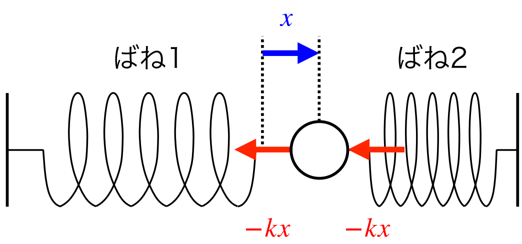

図 21: 1 自由度の振動。

- 運動方程式：単振動の方程式

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - kx \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2k}{m}x
\end{aligned}
\tag{146}
$$

- 運動方程式の解

$$
x(t) = C\cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{147}
$$

C, ϕ が積分定数（1 自由度なので 2 つ）、初期条件（初期位置と初期速度）で決まる

- 周期

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{148}
$$

k が大きい（ばねが強い）または m が小さい（質点が軽い）と周期が短い

9.2 重ね合わせの原理

- **線形微分方程式**：x について 1 次の項のみの方程式（x^2 や $\sin x$、定数項などを含まない）
  線形でない（非線形）微分方程式の例
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6c_1x^2 + c_2t \tag{149}$$
- 解の**重ね合わせの原理**：x_a、x_b が線形微分方程式の解のとき、解の線形結合
$$x = Ax_a + Bx_b, \quad A, B : 定数 \tag{150}$$
  も同じ方程式の解になる
- 例）単振動の方程式 (146) は線形：
$$\frac{d^2x_a}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x_a, \quad \frac{d^2x_b}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x_b \tag{151}$$
  のとき
$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(Ax_a + Bx_b) \\ &= A\frac{d^2x_a}{dt^2} + B\frac{d^2x_b}{dt^2} \\ &= A\left(-\frac{2k}{m}x_a\right) + B\left(-\frac{2k}{m}x_b\right) = -\frac{2k}{m}(Ax_a + Bx_b) = -\frac{2k}{m}x\end{aligned}$$
  非線形の方程式の解は重ね合わせの原理を満たさない

9.3 2 自由度の連成振動

- 1 次元の運動、ばね 1、質点 1、ばね 2、質点 2、ばね 3（図 22）
- 質点の質量は全て m、ばね定数は全て k
- つりあいの位置からの質点 1 の変位を x_1、質点 2 の変位を x_2、右向きが正
- $x_2 - x_1 > 0$ のとき：ばね 2 は伸びる $\Rightarrow$ 質点 1 への力は正方向、質点 2 は負方向
- 質点 1 への力：ばね 1 から $-kx_1$、ばね 2 から $k(x_2 - x_1)$
  （$x_2 - x_1 < 0$ の場合は符号が反転し正しく左向きの力を与える）
- 質点 2 への力：ばね 2 から $-k(x_2 - x_1)$、ばね 3 から $-kx_2$
- 運動方程式
$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \tag{152}$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = -2kx_2 + kx_1 \tag{153}$$
- 連立線形微分方程式：解の重ね合わせが成り立つ

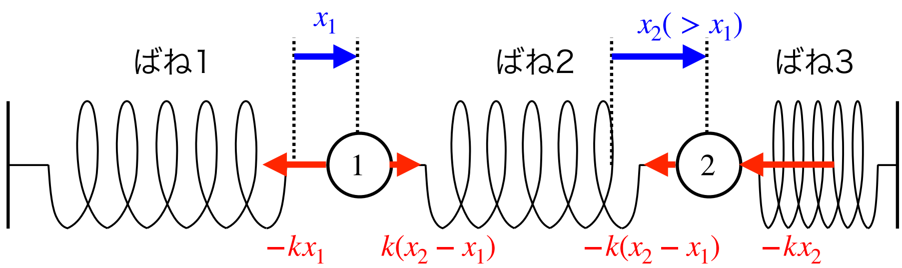

図 22: $x_2 > x_1$ の場合の 2 自由度の振動。

9.4 基準座標と基準振動

- 2 つの運動方程式の両辺の和をとる

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -2kx_1 + kx_2 - 2kx_2 + kx_1 \\
m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) &= -kx_1 - kx_2 \\
m\frac{d^2}{dt^2}\frac{x_1 + x_2}{2} &= -k\frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}
$$

- 両辺の差をとる

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} - m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -2kx_1 + kx_2 - (-2kx_2 + kx_1) \\
m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) &= -3kx_1 + 3kx_2 \\
m\frac{d^2}{dt^2}\frac{x_1 - x_2}{2} &= -3k\frac{x_1 - x_2}{2}
\end{aligned}
$$

- **基準座標**

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{154}$$

$$Y = \frac{x_1 - x_2}{2} \tag{155}$$

とすると、X、Y に対する運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2X}{dt^2} &= -kX, \quad \frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X \\
m\frac{d^2Y}{dt^2} &= -3kY, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{3k}{m}Y
\end{aligned}
$$

それぞれ単振動の方程式なので、解は

$$X = C_X \cos(\omega_X t + \phi_X), \quad \omega_X = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{156}$$

$$Y = C_Y \cos(\omega_Y t + \phi_Y), \quad \omega_Y = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{157}$$

- 運動方程式 (152)、(153) の解：基準座標の定義 (154),(155) より

$$x_1 = X + Y = C_X\cos(\omega_X t + \phi_X) + C_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{158}$$
$$x_2 = X - Y = C_X\cos(\omega_X t + \phi_X) - C_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{159}$$

  C_X, C_Y, ϕ_X, ϕ_Y が積分定数（2 自由度なので 4 つ)、初期条件で決まる

- **基準振動**（基準モード、モード)：基準座標が表す運動
  一般の運動は異なる基準振動の重ね合わせ

- $C_Y = 0$ のとき：X の基準振動（図 23 左)

$$x_1 = C_X\cos(\omega_X t + \phi_X) \tag{160}$$
$$x_2 = C_X\cos(\omega_X t + \phi_X) = x_1 \tag{161}$$

  2 つの質点が同じ向きに振動（ばね 2 は長さが変わらず力がはたらかない)

- $C_X = 0$ のとき：Y の基準振動（図 23 右)

$$x_1 = C_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y) \tag{162}$$
$$x_2 = -C_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y) = -x_1 \tag{163}$$

  2 つの質点が逆向きに振動（ばね 2 も力をおよぼす)

- 振動数の比較：

$$\omega_Y = \sqrt{\frac{3k}{m}} > \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_X \tag{164}$$

  なので Y の基準振動の方が振動数が大きく周期が短い $\Leftarrow$ ばね 2 の力も加わるため

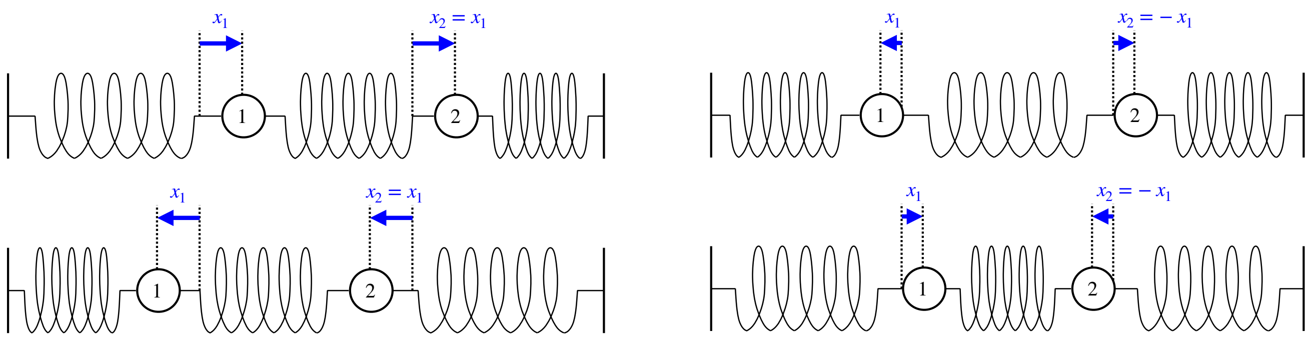

図 23: 2 自由度の基準振動。左：X の基準振動、右：Y の基準振動。