第 8 回補足

円筒座標系の公式

デカルト座標の単位ベクトルは位置ベクトル $\vec{r}$ の成分とは無関係なので、時間微分は常に消える：

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

円筒座標では、単位ベクトル $\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ の方向は位置座標 θ に依存する。よって、位置ベクトルが時間とともに変化する場合（$\theta(t)$）、単位ベクトルの時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{d(\cos\theta\vec{e}_x)}{dt} + \frac{d(\sin\theta\vec{e}_y)}{dt} \\
&= \frac{d\cos\theta}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\sin\theta}{dt}\vec{e}_y \\
&= -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y \\
&= \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \\
&= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

ベクトル $\vec{e}_r \times \vec{e}_z$ は、成分表示を用いて具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \times \vec{e}_z &= (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \times \vec{e}_z \\
&= \cos\theta\vec{e}_x \times \vec{e}_z + \sin\theta\vec{e}_y \times \vec{e}_z \\
&= \cos\theta(-\vec{e}_y) + \sin\theta\vec{e}_x \\
&= -(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \\
&= -\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

となる。この結果は以下のように考えても理解できる。$\vec{e}_r \times \vec{e}_z$ は $\vec{e}_r$ にも $\vec{e}_z$ にも直交するベクトルなので、$\vec{e}_\theta$ に比例する。また、$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_z$ が直交しており、それぞれ長さ 1 の単位ベクトルであることから、$\vec{e}_r \times \vec{e}_z$ の長さも 1 になっており、$+\vec{e}_\theta$ または $-\vec{e}_\theta$ の可能性がある。符号は図から右ねじの法則（$\vec{e}_r$ から $\vec{e}_z$ への回転で右ねじが進む方向が外積ベクトルの方向）で考えるとマイナスとわかる。

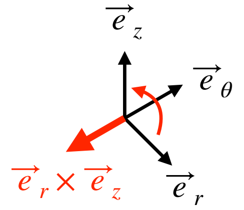

図 5: $\vec{e}_r \times \vec{e}_z$ の模式図。