8　こまの運動

8.1　歳差運動

- 軸のまわりで回転する剛体の**回転軸の方向が時間変動**する運動
- 歳差運動：回転軸の方向が周期的な回転をする（動画参照）
- 前回までと違う点：力のモーメント $\vec{N}$ と回転軸（$\vec{L}$）の**方向が別**
- ポイント：重力のモーメントが、こまが倒れる方向と垂直に軸を動かす

8.2　円筒座標系

- 2 次元極座標：(r, θ)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- 単位ベクトル（角度 θ、つまり位置ベクトルに依存）

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$$

質点の位置を極座標で表す場合、位置が変化するとベクトルの向きが変わる
$\Rightarrow$ 極座標の**単位ベクトルは時間依存** $d\vec{e}_r/dt \neq \vec{0}$、$d\vec{e}_\theta/dt \neq \vec{0}$

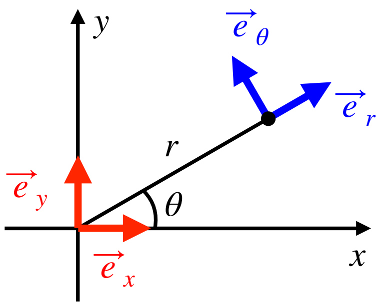

図 19: 2 次元極座標と単位ベクトル。

- 円筒座標系：3 次元デカルト座標 x, y, z のうち、x, y を 2 次元極座標 r, θ で表す
単位ベクトルは $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_z$
- 任意のベクトルはデカルト座標でも円筒座標でも表せる

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = (x\cos\theta + y\sin\theta)\vec{e}_r + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$$
$$\vec{F} = (F_x\cos\theta + F_y\sin\theta)\vec{e}_r + (-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta)\vec{e}_\theta + F_z\vec{e}_z$$

- 単位ベクトルは互いに直交

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0 \tag{139}$$

- 今日使う公式（導出は補足参照）

$$\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta \tag{140}$$

8.3　こまの歳差運動

- 質量 M、回転軸まわりの慣性モーメント I のこまが角速度 ω で回転
- こまの接地点 O を原点、重心と O の距離を ℓ
- 接地点 O は固定、角運動量、力のモーメントの基準は O

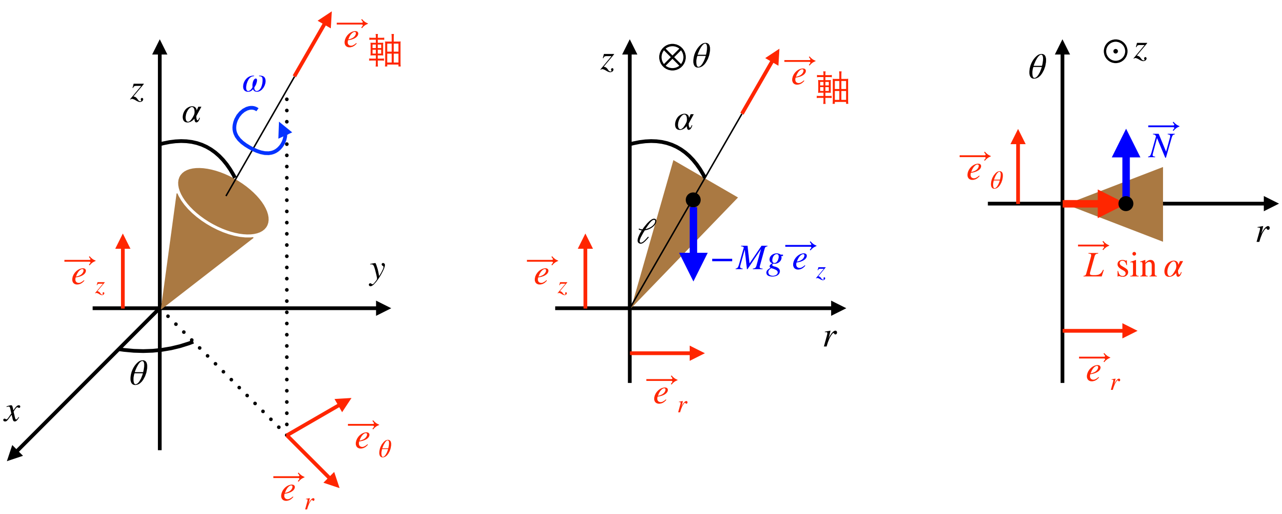

図 20: 左：こまの運動と座標軸の模式図。中：$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_z$ を含む平面の図（こまを横から見た場合）、右：$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ を含む平面の図（こまを上から見た場合）。

- 回転軸が z 軸から角度 α 傾いているとすると、軸方向の単位ベクトルは

$$\vec{e}_{軸} = \cos\alpha\vec{e}_z + \sin\alpha\vec{e}_r \tag{141}$$

- 角運動量ベクトル

$$\vec{L} = I\omega\vec{e}_{軸} \tag{142}$$

- 重力 $\vec{F}_g$ による力のモーメント

$$\vec{R} = \ell\vec{e}_{\text{軸}}, \quad \vec{F}_g = -Mg\vec{e}_z$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \vec{N} &= \vec{R} \times \vec{F}_g \\
&= \ell(\cos\alpha\vec{e}_z + \sin\alpha\vec{e}_r) \times (-Mg\vec{e}_z) \\
&= -Mg\ell\cos\alpha\vec{e}_z \times \vec{e}_z - Mg\ell\sin\alpha\vec{e}_r \times \vec{e}_z \\
&= -Mg\ell\sin\alpha(-\vec{e}_\theta) \\
&= Mg\ell\sin\alpha\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

$\vec{N}$ は $\vec{e}_\theta$ 方向を向いている

- 角運動量ベクトル $\vec{L}$ と力のモーメント $\vec{N}$ は直交している

$$\vec{L}\cdot\vec{N} = I\omega\vec{e}_{\text{軸}}\cdot Mg\ell\sin\alpha\vec{e}_\theta = I\omega Mg\ell\sin\alpha(\cos\alpha\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta + \sin\alpha\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta) = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}$ は大きさを変えず方向だけを変化させる（c.f. 円運動の向心力と速度）
$\Rightarrow$ こまの回転角速度 ω は時間変化しない
$\Rightarrow$ 変化しうるのは xy 平面内の角度 θ と z 軸からの傾き α

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta(t)}{dt} \neq 0, \quad \frac{d\alpha(t)}{dt} \neq 0 \tag{143}$$

- 回転の運動方程式

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(I\omega\vec{e}_{\text{軸}}) \\
&= \frac{d}{dt}[I\omega(\cos\alpha\vec{e}_z + \sin\alpha\vec{e}_r)] \\
&= I\omega\left[\frac{d}{dt}(\cos\alpha\vec{e}_z) + \frac{d}{dt}(\sin\alpha\vec{e}_r)\right] \quad \leftarrow (143) \\
&= I\omega\left[(\frac{d}{dt}\cos\alpha)\vec{e}_z + \cos\alpha\frac{d}{dt}\vec{e}_z + (\frac{d}{dt}\sin\alpha)\vec{e}_r + \sin\alpha\frac{d}{dt}\vec{e}_r\right] \\
&= I\omega\left[\frac{d\alpha}{dt}(-\sin\alpha)\vec{e}_z + \frac{d\alpha}{dt}\cos\alpha\vec{e}_r + \sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right] \\
&= I\omega\left[\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha\vec{e}_\theta + \frac{d\alpha}{dt}(\cos\alpha\vec{e}_r - \sin\alpha\vec{e}_z)\right]
\end{aligned}$$

$\vec{N} = Mg\ell\sin\alpha\vec{e}_\theta$ より、$\vec{e}_\theta$ に比例する項から

$$\begin{aligned}
Mg\ell\sin\alpha &= I\omega\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha \\
Mg\ell &= I\omega\frac{d\theta}{dt} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{Mg\ell}{I\omega}
\end{aligned}$$

それ以外の項から

$$\vec{0} = I\omega\frac{d\alpha}{dt}(\cos\alpha\vec{e}_r - \sin\alpha\vec{e}_z)$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

回転軸は θ 方向に角速度 $Mg\ell/(I\omega)$ の**等角速度円運動**（歳差運動）
α は時間変化しない（倒れない）

- $\omega > 0$ のとき $Mg\ell/(I\omega) > 0$：こまの回転方向と歳差運動の回転方向は同じ
- 逆回転のこま：$\omega \to -\omega$ とすれば良いので歳差運動も逆回転になる
- 歳差運動の角速度は ω に反比例：こまの回転が速いほど歳差は遅く、こまの回転がゆっくりになると歳差が速くなる
- α が変化しない：こまは倒れない？
倒れる方向の角運動量 $\vec{L}_\alpha$ を無視したため
$|\vec{L}| \gg |\vec{L}_\alpha|$ の場合に良い近似
$\vec{L}_\alpha$ を厳密に扱うと章動（α 方向の振動）がおこる
- 実際のこまには接地点での摩擦力などがはたらき $|\vec{L}|$ が時間とともに減少
$\Rightarrow$ 徐々に章動が起こり最終的にこまが倒れる

前半のまとめ

- 剛体：大きさを持った（変形しない）物体
質点の力学に加えて回転の自由度が存在する
- 剛体の運動方程式

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{144}$$

M：全質量、$\vec{R}$：重心座標、$\vec{F}$：剛体に作用する力、$\vec{P}$：重心の運動量
$\vec{N}$：剛体に作用する力のモーメント、$\vec{L}$：剛体の角運動量

- 回転軸の方向が変化しない場合

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} \tag{145}$$

ω：角速度、角度の時間微分 $\omega = d\varphi/dt$

- 慣性モーメント I：剛体の回転させにくさ