7 剛体の運動方程式（固定軸なし）

7.1 斜面上の剛体

- 回転軸が固定されていない（ただし方向は変わらない）剛体の運動
- xy 面内の断面が半径 r の円である剛体（円柱など）が角度 θ の斜面上で運動
- 斜面に平行に下向きに x 軸、垂直に下向きに y 軸（z 軸が手前向き）
- 剛体の質量 M、重心（円の中心）まわりの慣性モーメント I

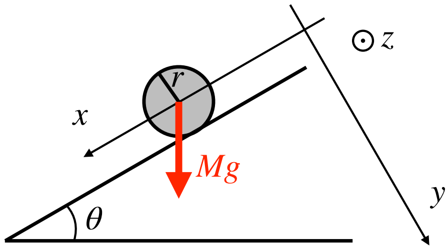

図 16: 斜面上の剛体。

- 重心の運動方程式

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F} \tag{121}$$

斜面横方向の運動なし（z 固定）
斜面から離れない（重力の y 成分と斜面の垂直抗力が釣り合い y 固定）
x 方向の運動方程式（1 自由度）

$$M\frac{d^2R_x}{dt^2} = F_x \tag{122}$$

- 回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{123}$$

回転軸は（移動するが）常に z 方向を向いているので、自由度は 1

$$I\frac{d\omega}{dt} = N_z \tag{124}$$

z 軸は手前方向、転がり落ちる回転が $\omega > 0$（z 軸正に対して右回り）

7.2　滑り落ちる剛体（摩擦なし）

- 斜面の摩擦がない場合、剛体は斜面上を回転せずに滑り落ちる
- 重力の x 方向成分は $Mg\sin\theta$
- 運動方程式

$$M\frac{d^2R_x}{dt^2} = Mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2R_x}{dt^2} = g\sin\theta \tag{125}$$

重心の運動は等加速度直線運動（加速度が $g\sin\theta$ で一定）

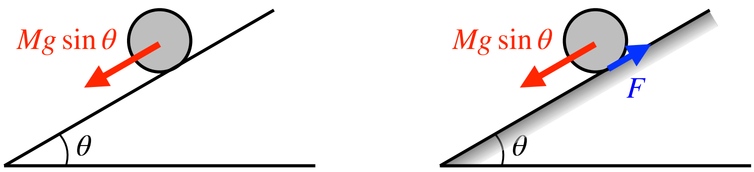

図 17: 斜面上の剛体にはたらく x 軸方向の力。左：摩擦なし、右：摩擦あり

7.3　転がり落ちる剛体（摩擦あり）

- 摩擦がある場合、剛体の接地点には x 方向負の向きに摩擦力 F がはたらく
- 重心の運動方程式

$$M\frac{d^2R_x}{dt^2} = Mg\sin\theta - F \tag{126}$$

- 剛体にはたらく力のモーメント
  重力の x 成分 $Mg\sin\theta$ は重心に作用：回転軸からの距離が 0 でモーメントを与えない
  摩擦力 F は斜面との接地点に作用：軸からの距離は半径 r、$\vec{r}_\perp$ と $\vec{F}$ が直交するので

$$N_z = rF \tag{127}$$

- 回転の運動方程式

$$I\frac{d\omega}{dt} = rF \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I}{r}\frac{d\omega}{dt} \tag{128}$$

- 重心運動の方程式 (126) から F を消去すると

$$M\frac{d^2R_x}{dt^2} = Mg\sin\theta - \frac{I}{r}\frac{d\omega}{dt} \tag{129}$$

未知関数は $R_x(t)$ と $\omega(t)$（2 自由度）

- 滑らずに転がり落ちる運動：R_x と ω が関係
  - 速度 V_x の並進運動：重心の速度 V_x、接地点の速度 V_x
  - 角速度 ω の回転運動：重心の速度 0、接地点の速度 $-r\omega$
  - 角速度 ω で回転しながら滑らずに速度 V_x で運動：2 つの合成
    重心の速度 V_x、接地点が**滑らない場合**、接地点の速度は $V_x - r\omega = 0$

$$\Rightarrow V_x = r\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_x}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d^2R_x}{dt^2}$$

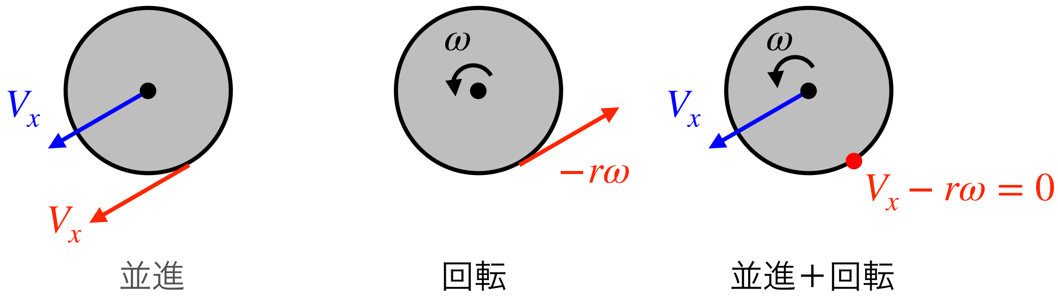

図 18: 並進（左)、回転（中)、転がり落ちる（右）運動の重心と接地点の速度。

- 運動方程式 (129) は ω を消去すると

$$\begin{aligned} M\frac{d^2R_x}{dt^2} &= Mg\sin\theta - \frac{I}{r^2}\frac{d^2R_x}{dt^2} \\ \left(M + \frac{I}{r^2}\right)\frac{d^2R_x}{dt^2} &= Mg\sin\theta \\ \frac{Mr^2+I}{r^2}\frac{d^2R_x}{dt^2} &= Mg\sin\theta \\ \frac{d^2R_x}{dt^2} &= \frac{Mr^2}{Mr^2+I}g\sin\theta \end{aligned}$$

- 摩擦なし (125) と比べると、加速度が

$$g\sin\theta \to \frac{Mr^2}{Mr^2+I}g\sin\theta \qquad (130)$$

  と変化、分母の方が大きいので加速度は小さくなる
  $\Leftarrow$ **回転運動にエネルギーが取られる**
  慣性モーメントが大きい（回転しにくい）剛体ほど加速度がより減少する

7.4 力学的エネルギーの保存

- 同じ問題を力学的エネルギー保存で考える

- 回転運動のエネルギー
  - 1つの質点の回転運動（質量 m、半径 r、角速度 ω）
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\underbrace{mr^2}_{=I}\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{131}$$
  - 剛体の回転運動
$$\frac{1}{2}\int dV\rho(\vec{r})v^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\int dV\rho(\vec{r})r_\perp^2}_{=I}\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{132}$$
- 重心が速度 V で運動、角速度 ω で回転している剛体の力学的エネルギー
$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{133}$$
- 摩擦なし
  - 回転しないので常に $\omega = 0$
  - 初期状態は静止（$V = 0$）：$E = 0$
  - 鉛直方向に h 滑り落ちたときの速度を V とすると、位置エネルギーを考慮して
$$E = 0 = \frac{1}{2}MV^2 - Mgh \tag{134}$$
  - 速度
$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad V^2 = 2gh \tag{135}$$
- 摩擦あり
  - 滑らずに転がり落ちる場合、力の方向に変位がないので摩擦は仕事をしない
  - 半径 r の剛体が滑らずに回転する場合の関係 $V = r\omega$ より
$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{r^2}\right)V^2 = \frac{1}{2}\frac{Mr^2 + I}{r^2}V^2$$
  - 初期状態は静止して（$V = 0$）回転していない（$\omega = 0$）とすると $E = 0$
  - 鉛直方向に h 転がり落ちたときの速度を V とすると、
$$E = 0 = \frac{1}{2}\frac{Mr^2 + I}{r^2}V^2 - Mgh \tag{136}$$
  - 速度
$$\frac{1}{2}\frac{Mr^2 + I}{r^2}V^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad V^2 = 2gh\frac{Mr^2}{Mr^2 + I} \tag{137}$$

    摩擦なし (135) と比べると、加速度が変化したように見える
$$g \rightarrow \frac{Mr^2}{Mr^2 + I}g \tag{138}$$
- 力学的エネルギー保存の結果は斜面の角度、形状によらない