第 6 回補足

単振り子と単振動

長さ ℓ の（重さのない）ひもの先に質量 m の質点がついた単振り子を考える。一般の質点の運動方程式（3 自由度）は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

z 方向を $z(t) = 0$ と固定して平面内の振り子の運動を考えれば 2 次元運動になる。振り子の端点を原点、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとると、位置座標はデカルト座標 (x, y) または極座標 (r, θ) で表すことができる。この場合の極座標は、振り子の端点からの距離を r、鉛直下向きからの角度を θ とする。ひもがゆるまない運動を考えると極座標の r が $r(t) = \ell$ と固定されて θ のみの 1 次元の問題になる。θ に関する軌道上の（長さの次元の）座標は $s = \ell\theta$ であり、s は鉛直下向きの位置からの変位を表す。質点にはたらく力は

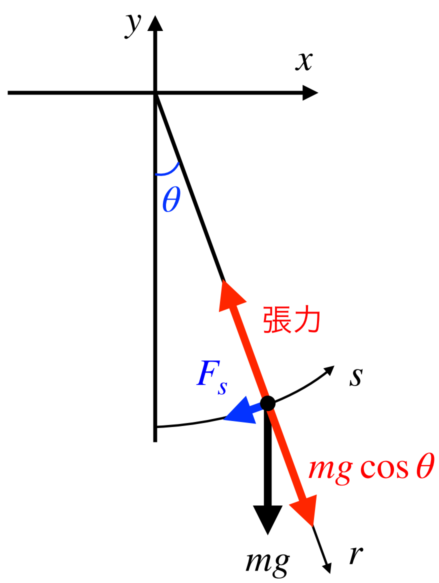

図 4: 単振り子の座標とはたらく力。

- 重力：鉛直下向きに mg（g：重力加速度）
- ひもの張力：r 負方向、重力の r 方向成分 $mg\cos\theta$ とつり合う
- 重力の s（θ）方向成分：$F_s = -mg\sin\theta$
  符号は力の向き、$s > 0$ のときに s が減る方向の力

であるので、変位 s に関する運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= F_s \\ m\frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} &= -mg\sin\theta \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{aligned}$$

振動（θ）が小さいとき

$$\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \simeq \theta$$

と近似すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \tag{$*$}$$

と単振動の微分方程式になる。一般に、単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の一般解は、A, B を定数として $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$、あるいは C, ϕ を定数として

$$x(t) = C\sin(\omega t + \phi)$$

である（2 階の微分方程式の一般解は積分定数 2 つ、三角関数は 2 回微分したら自分自身に戻ることで確認)。時刻 $t + 2\pi/\omega$ の位置は

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi/\omega) &= C\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] \\ &= C\sin(\omega t + \phi + 2\pi) \\ &= C\sin(\omega t + \phi) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

と時刻 t と同じ位置になるので、振動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

振り子の微分方程式 $(*)$ の解と周期 T は $\omega^2 = g/\ell$ とすれば

$$\begin{aligned} \theta(t) &= C\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \phi\right) \quad (C, \phi \text{ 定数}) \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \end{aligned}$$

周期はひもの長さ ℓ のみで決まり（等時性)、ひもの長さ ℓ が長いと周期が長い。