6　剛体の運動方程式（固定軸あり）

6.1　単振り子と単振動

- 単振り子：長さ ℓ の（重さのない）ひもの先に質量 m の質点（詳細は補足参照）
- 運動方程式（θ：鉛直下向きからの角度、g：重力加速度）

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{105}$$

- 振動（θ）が小さいとき、$\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \simeq \theta$ と近似すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \tag{106}$$

これは単振動の微分方程式

- 微分方程式 (106) の解と周期 T は

$$\theta(t) = C\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \phi\right) \quad (C, \phi \text{ 定数}) \tag{107}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{108}$$

周期はひもの長さ ℓ のみで決まる（等時性）
ひもの長さ ℓ が長いと周期が長い

6.2　剛体振り子

- 剛体振り子：固定された軸のまわりで運動する剛体
質量密度 $\rho(\vec{r})$、全質量 M、軸まわりの慣性モーメント I
水平方向を x、鉛直方向を y、水平な回転軸を z 方向とし、回転軸は座標原点 $(0,0,0)$ を通る
剛体には重力（y 軸負の向き）のみが作用
- 回転の運動方程式：軸が固定なので

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{109}$$

θ は剛体の回転角度

- 釣り合いの位置を $\theta = 0$（このとき重心は y 軸上）
重心と回転軸の距離を h とすると、重心座標 $\vec{R}$ の x 成分は

$$R_x = h\sin\theta \tag{110}$$

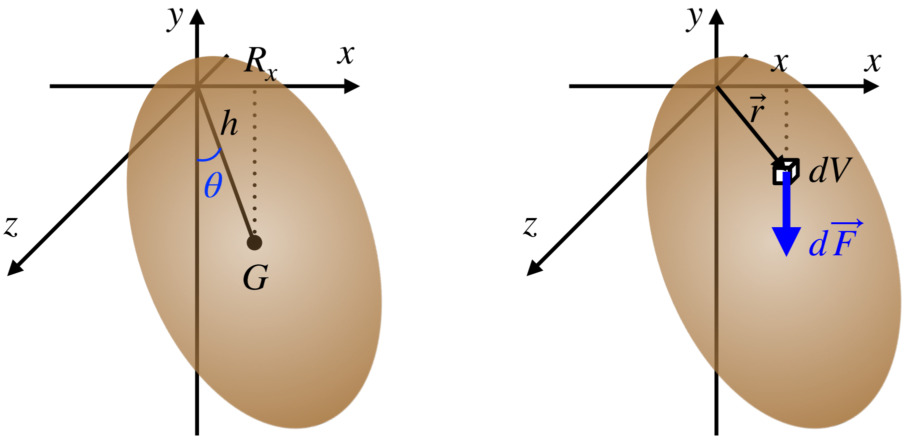

図 13: 剛体振り子。左：重心 G の回転角 θ、右：位置 $\vec{r}$ にある微小体積 dV。

- 位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ にある微小体積 dV にはたらく重力 $d\vec{F}$
  微小体積 dV の質量は $dm = \rho(\vec{r})dV$ なので（符号は鉛直下向き）

$$d\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 & -dmg & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho(\vec{r})dVg & 0 \end{pmatrix} \tag{111}$$

- 微小体積 dV による力のモーメント dN_z

$$dN_z = (\vec{r} \times d\vec{F})_z = x(-\rho(\vec{r})dVg) - y \cdot 0 = -\rho(\vec{r})dVgx \tag{112}$$

- 剛体全体の力のモーメント

$$N_z = \int dN_z = -g \int dVx\rho(\vec{r}) \tag{113}$$

  ここで重心の式 $R_x = \frac{1}{M} \int dVx\rho(\vec{r})$ と式 (110) を使うと

$$N_z = -MgR_x = -Mgh\sin\theta \tag{114}$$

  全質量 M が重心にかかった場合の力のモーメントと同じ

- θ の運動方程式

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N_z = -Mgh\sin\theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mhg}{I}\sin\theta$$

  単振り子の式 (105) と比較すると、ひもの長さが

$$\ell = \frac{I}{Mh} \quad (\text{相当単振り子の長さ}) \tag{115}$$

  の単振り子の運動方程式と同じ

- **剛体振り子の周期**：θ が小さいとき、式 (108) より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{gMh}} \tag{116}$$

- 単振り子で周期を長くするにはひもの長さ ℓ を伸ばす必要がある
周期が無限大（$T \to \infty$）になるのは $\ell \to \infty$ のとき（つまり実現できない）

- 剛体振り子の場合は**重心と回転軸の距離 $h \to 0$ で $T \to \infty$**（つまり実現できる）
ただし h が変わると I も変わることに注意（メトロノームの例参照）

6.3 メトロノームの原理

- メトロノーム：可動おもりの位置を変えると周期が変化（遠い方が周期が長い）

- モデル：重さのない棒に 2 つのおもり
棒に沿って x 軸、回転軸が $x = 0$
位置 $x > 0$ に質量 m_1 の可動おもり、$x = -a < 0$ に質量 m_2 の固定おもり

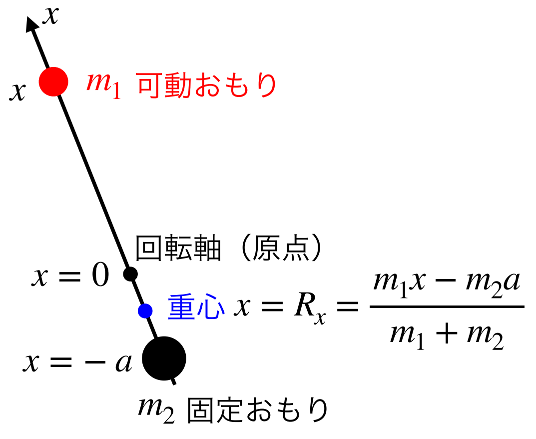

図 14: メトロノームのモデル。

- 慣性モーメント

$$I = m_1 x^2 + m_2(-a)^2 = m_1 x^2 + m_2 a^2 \tag{117}$$

- 重心の x 座標

$$R_x = \frac{m_1 x + m_2(-a)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x - m_2 a}{M} \quad (M = m_1 + m_2) \tag{118}$$

重心が回転軸より下（$R_x < 0$）になるための x の範囲は

$$0 < x < \frac{m_2 a}{m_1}$$

重心と軸の間の距離 h は、$R_x < 0$ なので

$$h = |R_x| = -R_x = \frac{-m_1 x + m_2 a}{M} \tag{119}$$

- 相当単振り子の長さ：

$$\ell = \frac{I}{Mh} = \frac{m_1 x^2 + m_2 a^2}{M \dfrac{-m_1 x + m_2 a}{M}} = \frac{m_1 x^2 + m_2 a^2}{-m_1 x + m_2 a} \tag{120}$$

これは $0 < x < m_2 a/m_1$ で x に対して単調増加：x で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell}{dx} &= \frac{1}{-m_1 x + m_2 a}\frac{d}{dx}(m_1 x^2 + m_2 a^2) + (m_1 x^2 + m_2 a^2)\frac{d}{dx}(-m_1 x + m_2 a)^{-1} \\
&= \frac{1}{-m_1 x + m_2 a} 2m_1 x + (m_1 x^2 + m_2 a^2)(-1)(-m_1 x + m_2 a)^{-2}\frac{d}{dx}(-m_1 x + m_2 a) \\
&= \frac{2m_1 x}{-m_1 x + m_2 a} + \frac{(m_1 x^2 + m_2 a^2)(-1)}{(-m_1 x + m_2 a)^2}(-m_1) \\
&= \frac{2m_1 x}{-m_1 x + m_2 a} + \frac{m_1(m_1 x^2 + m_2 a^2)}{(-m_1 x + m_2 a)^2}
\end{aligned}$$

となるが、第 1 項分子は $0 < x$ より正、分母は条件 $x < m_2 a/m_1$ より正である。第 2 項は実数の 2 乗は常に正であることから正となり、結局

$$\frac{d\ell}{dx} > 0 \quad (0 < x < \frac{m_2 a}{m_1})$$

- おもりが遠い（x が大きい）と周期が長い（ℓ、T が増加）
図 15：$m_1 = 10$ g、$m_2 = 100$ g、$a = 1$ cm、$g = 9.8$ m/s^2 とした場合の $\ell(x)$ と $T(x)$
x の上限は $m_2 a/m_1 = 10$ cm

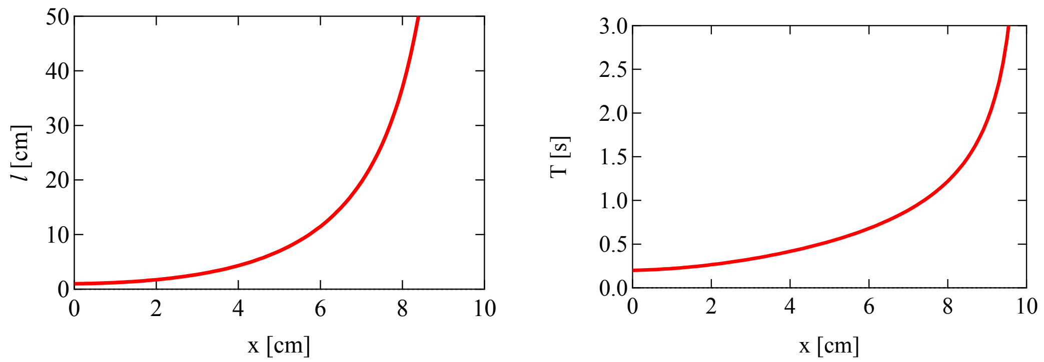

図 15: $m_1 = 10$ g、$m_2 = 100$ g、$a = 1$ cm、$g = 9.8$ m/s^2 とした場合のメトロノームの相当単振り子の長さ ℓ（左）と周期 T（右）。

- 実際のメトロノームは摩擦のため振動が減衰するので、ネジの力を加えて周期運動させる
式 (116) の周期になるのは振幅が小さい場合のみ