# 第5回補足

## 質点系、剛体の角運動量と慣性モーメント

質点が複数ある場合、$i$ 番目の質点の角運動量 $L_{z,i}$ は一般に

$$L_{z,i} = m_i r_{\perp,i}^2 \omega_i$$

ここで $m_i$ は質量、$r_{\perp,i}$ は質点と回転軸との距離、$\omega_i$ は質点の角速度である。質点が複数ある場合の質点系全体の角運動量 $L_z$ は

$$L_z = \sum_i L_{z,i} = \sum_i \left( m_i r_{\perp,i}^2 \omega_i \right)$$

であるが、質点の間の距離が固定されている場合、全ての質点は同じ角速度 $\omega$ を持つ：

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega$$

このとき、

$$L_z = \sum_i \left( m_i r_{\perp,i}^2 \omega \right) = m_1 r_{\perp,1}^2 \omega + m_2 r_{\perp,2}^2 \omega + \cdots = \left( \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 \right) \omega$$

と $\omega$ は和の外に出せる。ここで慣性モーメントの定義 $L_z = I\omega$ を用いると

$$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2$$

を得る。同様に、剛体中の位置 $\vec{r}$ にある微小体積 $dV = dxdydz$ について、この部分の質量は $\rho(\vec{r})dV$ なので、微小角運動量 $dL_z$ は一般に

$$dL_z = \rho(\vec{r}) dV r_\perp^2 \omega(\vec{r})$$

である。$r_\perp$ は微小体積と回転軸との距離、$\omega(\vec{r})$ は微小体積の角速度である。剛体全体の角運動量 $L_z$ は

$$L_z = \int dL_z = \int dV \left[ \rho(\vec{r}) r_\perp^2 \omega(\vec{r}) \right]$$

であるが、剛体の各部分は同じ角速度 $\omega$ を持つ：

$$\omega(\vec{r}) = \omega \quad (\text{位置 } \vec{r} \text{ に依らず一定})$$

このとき、質点系の場合と同様に

$$L_z = \int dV \left[ \rho(\vec{r}) r_\perp^2 \right] \omega$$

と $\omega$ は積分の外に出せる。ここで慣性モーメントの定義 $L_z = I\omega$ を用いると

$$I = \int dV \rho(\vec{r}) r_\perp^2$$

を得る。