5　剛体の角運動量

5.1　回転運動

- 一般の場合の剛体の回転の自由度は 3、運動方程式は
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{86}$$
成分ごとに書くと
$$\frac{dL_x}{dt} = N_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = N_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = N_z \tag{87}$$
- 回転軸の方向が時間変化しない場合を考え、回転軸を z 軸に選ぶと、
$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \tag{88}$$
が運動方程式、他の 2 自由度は z 軸の方向を指定する
- **角速度** ω：回転角度 φ（単位はラジアン）の時間変化、次元は T^{-1}
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{89}$$
(ω の符号は回転の向きを表す、より正確には z 軸まわりの角速度なので ω_z)
回転中心から距離 r の位置の速度の大きさ v は
$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega \tag{90}$$
剛体が回転するとき、剛体の各部分での**角速度は共通**
一般に ω は時間に依存するので $\omega(t)$（時間とともに回転速度が増加／減少する）

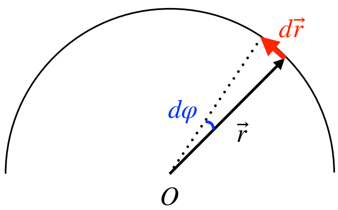


図 9: 微小な回転角 $d\varphi$ による位置ベクトル $\vec{r}$ の変化。

- **慣性モーメント** I：角運動量と角速度の比例係数、次元は L^2M
$$L_z = I\omega \tag{91}$$
(より一般的には慣性モーメントテンソル I_{ij} を用いて $L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$)
運動方程式を用いると
$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N_z \tag{92}$$
同じ力のモーメントを与えた場合、I が大きい方が角加速度 $d\omega/dt$ が小さい
意味：回転運動に対する "質量"（剛体の回転させにくさ、回転の止めにくさ）
$\leftarrow$ 式の形が $F_z = M\dfrac{dv_z}{dt}$ と類似

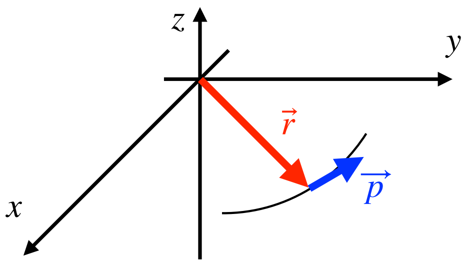
5.2 質点系の慣性モーメント

- xy 平面内（$\vec{r}=(x,y,0)$）の質量 m の質点の慣性モーメント
  z 軸まわりの回転運動、運動量ベクトル $\vec{p}$ は位置ベクトルと直交するので

$$L_z = (\vec{r}\times\vec{p})_z = rmv\sin(\pi/2) = mr^2\omega \tag{93}$$

ここで $r=\sqrt{x^2+y^2}$、式 (91) より $L_z = I\omega$ なので

$$I = mr^2 \tag{94}$$



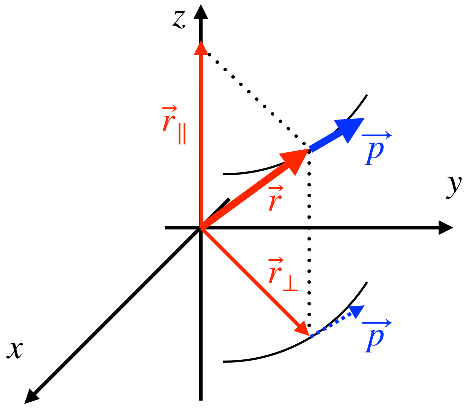


図 10: z 軸まわりの質点の回転運動。左：xy 平面内の運動、右：$z\neq 0$ の位置にある場合の運動。

- $z\neq 0$ の位置にある質点の慣性モーメント（$\vec{r}=(x,y,z)$）
  z 軸まわりの回転運動、位置ベクトル $\vec{r}$ を z 成分 $\vec{r}_\parallel$ と xy 面内成分 $\vec{r}_\perp$ に分割

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$$
$$\vec{r}_\perp = (x,y,0),\quad \vec{r}_\parallel = (0,0,z)$$
$$L_z = (\vec{r}\times\vec{p})_z = (\vec{r}_\parallel\times\vec{p})_z + (\vec{r}_\perp\times\vec{p})_z$$

$\vec{r}_\parallel$ は z 方向を向いており、$\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$、$\vec{b}$ のどちらにも垂直なので $\vec{r}_\parallel\times\vec{p}$ の z 成分は 0、よって

$$L_z = (\vec{r}_\perp\times\vec{p})_z = r_\perp mv = mr_\perp^2\omega$$
$$I = mr_\perp^2$$

$r_\perp$ **は回転軸から質点の距離**、$\vec{r}_\perp=(x,y,0)$ より

$$r_\perp^2 = x^2+y^2 \tag{95}$$

つまり $r_\perp=\sqrt{x^2+y^2}$、z に依存しないことに注意

- 間の距離が固定された質点系の慣性モーメント（補足参照、角速度が共通なので）

$$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 \tag{96}$$

$r_{\perp,i}$ は回転軸から質点 i の距離

5.3 剛体の慣性モーメント

- **剛体の慣性モーメント**（補足参照、角速度が共通なので）

$$I = \int \rho(\vec{r})\ r_\perp^2\ dV \tag{97}$$

$\vec{r}$ は剛体内部の位置座標（$\vec{r}_i$ に対応）、そこでの質量が $\rho(\vec{r})dV$（m_i に対応）
$r_\perp$ は回転軸から位置 $\vec{r}$ までの距離
座標原点を通る z 軸まわりの回転の場合

$$I = \int \rho(\vec{r})\ (x^2+y^2)\ dV \tag{98}$$

- 例 1）位置 $\vec{r}_1 = (a,0,0)$ に質量 m_1 の質点、$\vec{r}_2 = (b,b,0)$ に m_2、$\vec{r}_3 = (0,0,c)$ に m_3 がある場合の z 軸まわりの慣性モーメント

$$I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_{\perp,i}^2 = m_1 a^2 + m_2(b^2+b^2) + m_3 0^2 = m_1 a^2 + 2m_2 b^2 \tag{99}$$

- 例 2）xy 平面内の一様線密度 λ_0 で長さ ℓ の棒の重心を通る z 軸まわりの慣性モーメント
全質量 M は棒の長さ ℓ に線密度 λ_0 をかけたものなので $M = \lambda_0 \ell$
棒に沿って x 軸をとり端点の座標を $(\ell/2,0,0)$、$(-\ell/2,0,0)$ とすると、重心の x 座標は

$$R_x = \frac{1}{M}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx \lambda_0\ x = \frac{\lambda_0}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = 0 \tag{100}$$

よって原点が重心（棒の長さの半分の点）
慣性モーメントは、回転軸からの距離 $r_\perp$ が x なので

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \lambda_0\ x^2\ dx = \lambda_0\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \lambda_0\left[\frac{\ell^3}{24} - \left(-\frac{\ell^3}{24}\right)\right] = \frac{\lambda_0 \ell^3}{12} = \frac{M\ell^2}{12} \tag{101}$$

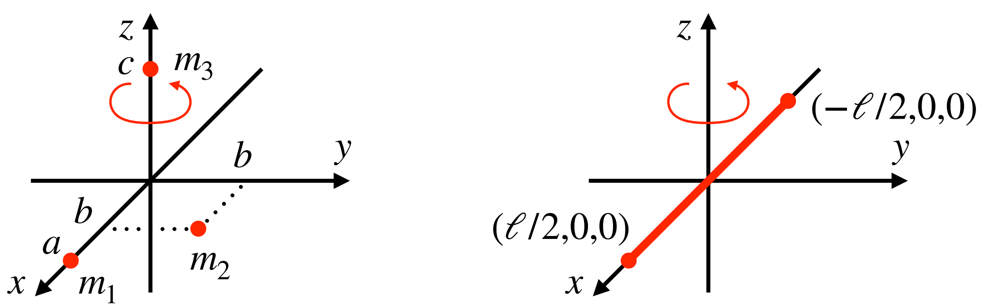


図 11: 質点系と剛体の慣性モーメント。左：例 1)、右：例 2)。

5.4 平行軸の定理

- 質量 M の剛体の重心を通る軸まわりの慣性モーメント I_G と、それと平行で距離 h 離れた軸まわりの慣性モーメント I_h の関係

$$I_h = I_G + Mh^2 \tag{102}$$

- 意味：$Mh^2 \geq 0$ より $I_h \geq I_G$、つまり重心を中心に回転するのが最も効率が良い（小さい力で速く回る）

- 証明：原点を重心にとった場合の重心を通る軸まわりの慣性モーメント I_G

$$I_G = \int \rho(\vec{r})\ (x^2 + y^2)\ dV \tag{103}$$

平行で距離 h 離れた回転軸が通る座標を $\vec{r}_h = (x_h, y_h, 0)$ とすると、新しい軸からみた位置 $\vec{r}_\perp = (x, y, 0)$ の点のベクトルは $\vec{r}_\perp - \vec{r}_h = (x - x_h, y - y_h, 0)$ となるので（$dV = dxdydz$ に注意）

$$\begin{aligned}
h^2 &= x_h^2 + y_h^2 \\
I_h &= \int \rho(\vec{r})\ [(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2]\ dV \\
&= \int \rho(\vec{r})\ (x^2 - 2xx_h + x_h^2 + y^2 - 2yy_h + y_h^2)\ dV \\
&= \int \rho(\vec{r})\ (x^2 + y^2)\ dV - \int \rho(\vec{r})\ (2xx_h + 2yy_h)\ dV + (x_h^2 + y_h^2) \int \rho(\vec{r})\ dV \\
&= I_G - 2x_h \int \rho(\vec{r})\ x\ dV - 2y_h \int \rho(\vec{r})\ y\ dV + Mh^2
\end{aligned}$$

重心座標の定義 (75) より

$$\int \rho(\vec{r})\ x\ dV = MR_x, \quad \int \rho(\vec{r})\ y\ dV = MR_y \tag{104}$$

だが、重心座標を原点にとったので $R_x = R_y = 0$、よって平行軸の定理 (102) を得る

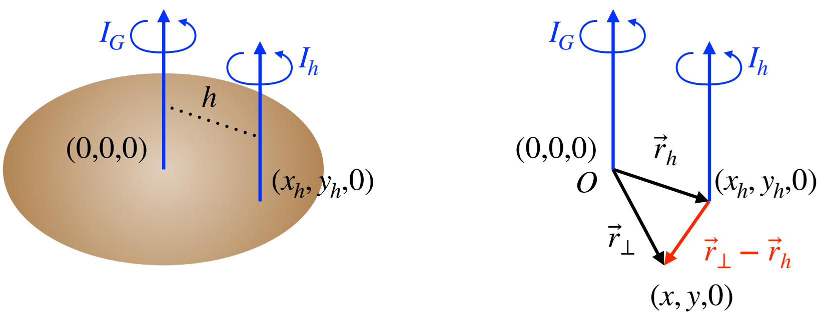


図 12: 平行軸の定理。