第 4 回補足

偶関数と奇関数

x の関数が以下の性質を満たすとき、$f_{偶}(x)$ は偶関数、$f_{奇}(x)$ は奇関数と呼ばれる。

$$f_{偶}(-x) = f_{偶}(x)$$
$$f_{奇}(-x) = -f_{奇}(x)$$

例えば $f(x) = x^n$ は、n が偶数のとき偶関数、奇数のとき奇関数。また、$f_{偶}(x)$、$g_{偶}(x)$ が偶関数、$f_{奇}(x)$、$g_{奇}(x)$ が奇関数のとき

$$f_{偶}(x)g_{偶}(x) : \text{偶関数}$$
$$f_{奇}(x)g_{奇}(x) : \text{偶関数}$$
$$f_{偶}(x)g_{奇}(x) : \text{奇関数}$$

が成り立つ（$-x$ を代入すれば確認できる）。どちらでもない関数 (例えば $f_{偶}(x) + g_{奇}(x)$）もあることに注意。積分区間が $x = 0$ について**対称**なとき、

$$\int_{-a}^{a} dx f_{偶}(x) = 2\int_{0}^{a} dx f_{偶}(x), \quad \int_{-a}^{a} dx f_{奇}(x) = 0$$

となる（図 2 参照）。これらの性質により計算が簡単になり、間違いを減らすことにもつながる。

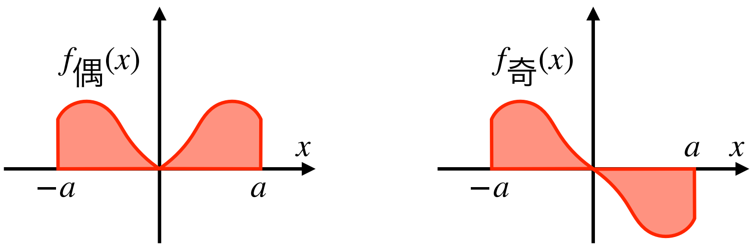

図 2: 対称区間（$x = -a$ から a まで）の偶関数（左)、奇関数（右）の積分。

重積分

複数の変数に依存する多変数関数の積分を重積分という。定義は、2 変数の場合

$$\int dx \int dy f(x, y) = \iint f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

意味：点 (x_i, y_j) での底面積 $\Delta x \Delta y$、高さ $f(x_i, y_j)$ の直方体の体積を範囲内で全て足す（図 3 左）

使い方：**積分する変数以外は定数**とみなして一変数ずつ順番に積分

$$
\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^b dy (Ax^2 y + Bx + C) &= \int_0^a dx \left[Ax^2 \frac{y^2}{2} + (Bx + C) y \right]_{y=0}^b \\
&= \int_0^a dx \left(\frac{Ab^2}{2} x^2 + Bbx + Cb \right) \\
&= \left[\frac{Ab^2}{2} \frac{x^3}{3} + Bb \frac{x^2}{2} + Cbx \right]_{x=0}^a \\
&= \frac{Aa^3 b^2}{6} + \frac{Ba^2 b}{2} + Cab
\end{aligned}
\tag{1}
$$

逆の順番で積分しても結果は同じ（定義が和なので順番を交換できる）

$$
\begin{aligned}
\int_0^b dy \int_0^a dx (Ax^2 y + Bx + C) &= \int_0^b dy \left[A \frac{x^3}{3} y + B \frac{x^2}{2} + C \right]_{x=0}^a \\
&= \int_0^b dy \left(A \frac{a^3}{3} y + B \frac{a^2}{2} + C \right) \\
&= \left[A \frac{a^3}{3} \frac{y^2}{2} + \left(B \frac{a^2}{2} + C \right) y \right]_{y=0}^b \\
&= \frac{Aa^3 b^2}{6} + \frac{Ba^2 b}{2} + Cab
\end{aligned}
$$

ただし**積分範囲が別の積分変数を含む場合**は先に積分を行う。式 (1) の積分範囲（図 3 中）の y の上限は常に b だが、式 (2)（図 3 右）では x の値ごとに上限が変わるため。

$$
\begin{aligned}
\int_0^a dx \int_0^x dy (Ax^2 y + Bx + C) &= \int_0^a dx \left[Ax^2 \frac{y^2}{2} + (Bx + C) y \right]_{y=0}^x \\
&= \int_0^a dx \left(\frac{A}{2} x^4 + Bx^2 + Cx \right) \\
&= \left[\frac{A}{2} \frac{x^5}{5} + B \frac{x^3}{3} + C \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^a \\
&= \frac{Aa^5}{10} + \frac{Ba^3}{3} + \frac{Ca^2}{2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

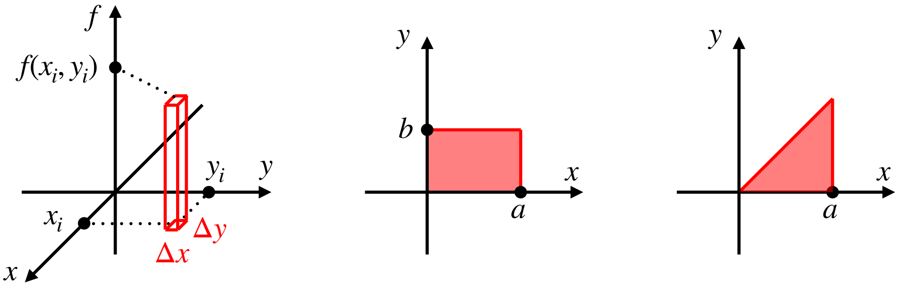

図 3: 左：重積分の定義、中：式 (1) の積分範囲、右：式 (2) の積分範囲。