4　剛体の運動学

4.1　剛体の運動

- **剛体**：**大きさ**を持った変形しない物体
  - 例）棒、コマ、滑車など
  - 現実の物質は少しは変形するので、完全な剛体は理想化
  - 球体などの場合も**向き**が区別できると考える（c.f. 地球）
  - 質点の集まりで、間の距離が変わらないものと考えられる
    （原子を質点と考えれば、現実の物質はアボガドロ数ほどの個数の質点の集まり）

- 剛体の次元
  - 3 次元の剛体：通常の物体（表面の形は様々）
  - 2 次元の剛体：厚さのない板（板の輪郭は様々）
  - 1 次元の剛体：太さのない棒（棒の長さは様々）
  - 0 次元の剛体：大きさのない点（= 質点）

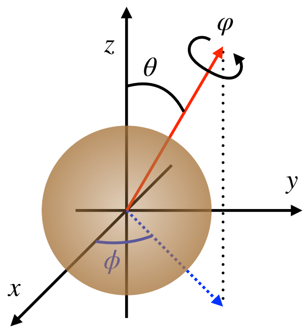

図 6: 剛体の向きを表す角度 θ、ϕ、φ。

- 3 次元の剛体の自由度（必要な変数の数）は？
  - 剛体の**位置**を表す重心座標 3 つ：$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$
  - 剛体の**向き**を表す角度 3 つ
    回転軸の向きを決める 3 次元極座標の θ, ϕ とその軸の周りの回転角 φ
  - 太陽を座標原点とした場合、地球の位置（公転運動）は $\vec{R}$ が決め、地軸の向きを θ, ϕ が、地軸まわりの回転（自転）を φ が決める
  - 全体で**自由度 6**：運動方程式は合計 6 つ

4.2 剛体の密度と質量

- n 質点系の全質量 M

$$M = \sum_i m_i, \tag{69}$$

- 剛体の（全）質量 M

$$M = \int \rho(\vec{r}) dV = \int dx \int dy \int dz\ \rho(x, y, z) \tag{70}$$

質量密度 $\rho(\vec{r})$：単位体積あたりの質量、次元は $L^{-3}M$
位置 $\vec{r}$ にある微小体積 dV の質量は $\rho(\vec{r})dV$（m_i に対応）
積分の範囲は剛体の形で決まる（あるいは剛体の外では $\rho(\vec{r}) = 0$）

  - 1 次元の剛体の場合：$\lambda(x)$ は**線密度**（単位長さあたりの質量、次元は $L^{-1}M$）

$$M = \int dx\ \lambda(x) \tag{71}$$

    積分の範囲は剛体の端から端まで

  - 2 次元の剛体の場合：$\sigma(x, y)$ は**面密度**（単位面積あたりの質量、次元は $L^{-2}M$）

$$M = \int dx \int dy\ \sigma(x, y) \tag{72}$$

    積分の範囲は剛体の形で決まる

4.3 剛体の重心

- n 質点系の重心

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{73}$$

- 剛体の重心座標

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \rho(\vec{r})\ \vec{r}\ dV \tag{74}$$

$$(R_x, R_y, R_z) = \frac{1}{M} \left(\int dV\ x\rho(x, y, z), \int dV\ y\rho(x, y, z), \int dV\ z\rho(x, y, z) \right) \tag{75}$$

$\vec{r}$ は剛体内部の位置座標（$\vec{r}_i$ に対応）、そこの微小体積の質量が $\rho(\vec{r})dV$（m_i に対応）

- 例 1） 位置 $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$ に質量 m_1 の質点が、$\vec{r}_2 = (0, b, 0)$ に m_2 の質点がある場合の重心

$$M = m_1 + m_2 \tag{76}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{m_1}{M}(a, 0, 0) + \frac{m_2}{M}(0, b, 0) = \left(\frac{m_1 a}{M}, \frac{m_2 b}{M}, 0 \right) \tag{77}$$

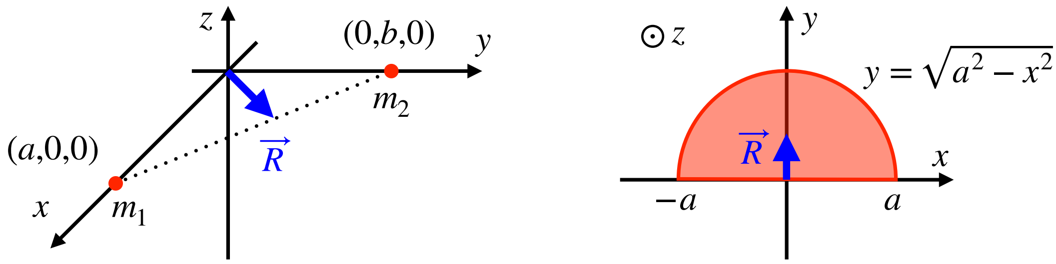

図 7: 質点系と剛体の重心座標。左：例 1)、右：例 2)。

- 例 2）一様面密度 σ（座標 x, y によらず密度が一定で $\sigma(x, y) = \sigma$）で半径 a の半円板の重心
全質量 M は面密度 σ に半円板の面積 $\pi a^2/2$ をかけたものなので

$$M = \frac{\pi a^2 \sigma}{2} \tag{78}$$

半円板の中心を原点に、円板が xy 平面内の $y \geq 0$ に配置するように座標をとる
半円の端の点は $x^2 + y^2 = a^2$ を満たすので、半円板上端の y 座標は x の関数として

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{79}$$

（$y \geq 0$ に注意）よって

$$(R_x, R_y, R_z) = \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\ \sigma \times (x, y, 0) \tag{80}$$

各成分は（y の積分範囲に x が含まれるので y から先に積分する）

$$\begin{aligned}
R_x &= \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma x\ dy \\
&= \frac{\sigma}{M} \int_{-a}^{a} dx\ x[y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sigma}{M} \int_{-a}^{a} dx\ x\sqrt{a^2-x^2} = 0 \qquad \leftarrow x \text{ の奇関数} \\
R_y &= \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma y\ dy \\
&= \frac{\sigma}{\pi a^2 \sigma/2} \int_{-a}^{a} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\pi a^2} \int_{-a}^{a} dx (a^2 - x^2) = \frac{1}{\pi a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4a}{3\pi}
\end{aligned}$$

z 成分は被積分関数が 0 なので $R_z = 0$、よって重心座標は

$$\vec{R} = \left(0, \frac{4a}{3\pi}, 0\right) \tag{81}$$

4.4 剛体の運動方程式

- 位置 $\vec{r}_1$ に力 $\vec{F}_1$ が、$\vec{r}_2$ に $\vec{F}_2$ が、$\cdots$、$\vec{r}_n$ に $\vec{F}_n$ がはたらいている剛体（図 8 左）

- **力の作用点**：$\vec{r}_i$
  質点の場合、力の作用点は常に質点の位置座標
  剛体の場合、重心座標以外の点に力が作用できる

- 重心の運動方程式（3 自由度）

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \tag{82}$$

- 力の釣り合い：合力が消える場合、力の**作用点に無関係**

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \tag{83}$$

  重心は等速直線運動（最初に静止していれば静止）

- 座標原点まわりの回転の運動方程式（3 自由度）

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad \vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{84}$$

  $\vec{L}$ は座標原点まわりの剛体の角運動量、定義などは次回

- 力のモーメントの釣り合い：力のモーメントの和が消える場合、力の**作用点に依存**

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \vec{0} \tag{85}$$

  剛体は等速回転運動（最初に静止していれば回転しない）

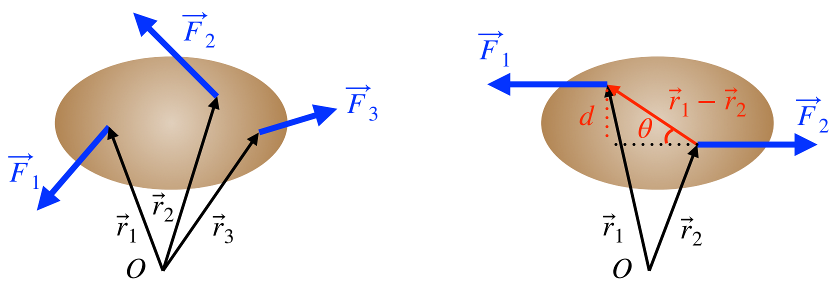

図 8: 剛体にはたらく力の例。左：一般の場合、右：偶力の場合。

- 力の作用点によっては、**$\vec{F} = \vec{0}$ でも $\vec{N} \neq \vec{0}$ の場合**がある
  例）偶力（図 8 右）：剛体の異なる部分（$\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$）に大きさが同じで反平行（平行で向きが逆）の力が作用する

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}_{偶}$$
$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{偶} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{偶}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{偶}$$

  力のモーメントの大きさ $|\vec{N}| = d|\vec{F}_{偶}|$ は作用線間の距離 $d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\sin\theta$ のみで決まる
  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ なので偶力は重心に加速度を与えない