3 相対運動と衝突

3.1 相対運動

- 2 質点系の**相対座標**：質点 2 を基準とした質点 1 の座標（図 4）

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{48}$$

どちらを基準にするかで 2 通り考えられるが、1 と 2 の名前の付け替えで同じになる

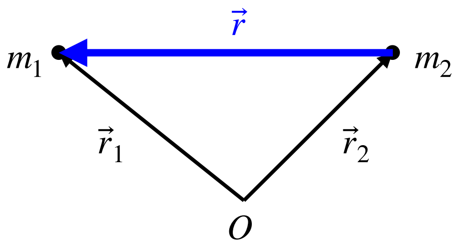

図 4: 相対座標 $\vec{r}$。

- **換算質量**：

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \tag{49}$$

- 外力 $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{0}$ のときの運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{1\leftarrow 2}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{50}$$

- 相対座標の時間微分

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$
$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_2 m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

運動方程式を代入すると

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_2 \vec{F}_{1\leftarrow 2} - m_1 \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{51}$$

内力 $\vec{F}_{内}$ を

$$\vec{F}_{内} = \vec{F}_{1\leftarrow 2} \tag{52}$$

と定義すると、作用反作用の法則より

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = -\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{内} \tag{53}$$

なので

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= m_2 \vec{F}_{内} - m_1(-\vec{F}_{内}) \\ m_1 m_2 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= (m_1 + m_2)\vec{F}_{内} \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}_{内} \end{aligned}$$

換算質量の定義を用いると、相対座標の運動方程式は

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{内} \tag{54}$$

- 外力がない場合、相対座標 $\vec{r}$ の運動は**質量 μ の質点に内力 $\vec{F}_{内}$ がかかった運動**と同じ

3.2 運動エネルギーの分解

- 重心座標と相対座標

$$\vec{R} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \tag{55}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{56}$$

- $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ について解く

$$\begin{aligned} &式\,(55) + \frac{m_2}{M}式\,(56) \quad \Rightarrow \quad \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{M}\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \\ &式\,(55) - \frac{m_1}{M}式\,(56) \quad \Rightarrow \quad \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} = \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 - \frac{-m_1}{M}\vec{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{M}\vec{r}_2 = \vec{r}_2 \end{aligned}$$

まとめると

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{57}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{58}$$

位置座標 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ は重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$ で表現できる（作図でも同じ結果を得る）

- 重心速度 $\vec{V}$ と相対速度 $\vec{v}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{59}$$

- 速度の重心と相対への分離

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{m_2}{M}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{v} \tag{60}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{v} \tag{61}$$

- 2 質点系の全運動エネルギー T

$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} \tag{62}$$

重心速度と相対速度で表現すると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\left(\vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{v}\right)^2 \\
&= \frac{m_1}{2}\left(\vec{V}^2 + 2\frac{m_2}{M}\vec{v}\cdot\vec{V} + \frac{m_2^2}{M^2}\vec{v}^{\,2}\right) + \frac{m_2}{2}\left(\vec{V}^2 - 2\frac{m_1}{M}\vec{v}\cdot\vec{V} + \frac{m_1^2}{M^2}\vec{v}^{\,2}\right) \\
&= \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\vec{V}^2 + \left(\frac{m_1}{2}2\frac{m_2}{M} + \frac{m_2}{2}\left(-2\frac{m_1}{M}\right)\right)\vec{v}\cdot\vec{V} + \left(\frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{2}\frac{m_1^2}{M^2}\right)\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}\,\vec{v}^2 \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}
\end{aligned}$$

全運動エネルギーは重心運動と相対運動のエネルギーの和で表現できる

3.3 弾性衝突と保存則

- 外力なしで 2 つの物体が衝突し速度が変化
  衝突前の速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$、衝突後の速度 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$（図 5 左）

- **弾性衝突**：衝突の前後で力学的エネルギーが保存する場合
  衝突前と衝突後は同じ 2 つの物体

- 弾性衝突でない例：衝突時にエネルギーが失われる（物体が変形する、火花が出る、など）場合や、衝突の前後で状態が変化する（物体が割れる）場合

- エネルギー保存（弾性衝突の場合）

$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^{\,2} \tag{63}$$

ポテンシャルエネルギーは 0：外力は仕事をせず、内力の仕事は 1 と 2 で符号が反対

- 運動量保存

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \tag{64}$$

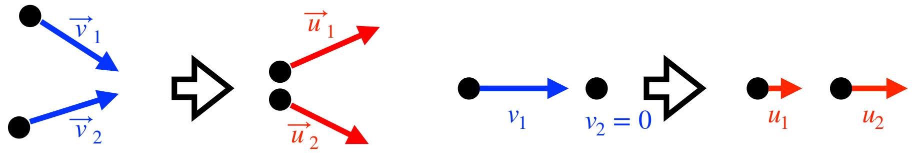

図 5: 衝突の模式図。左：3 次元運動の衝突。右：1 次元運動の衝突（$v_2 = 0$ の場合）。

- 例）1 次元運動（速度は 1 成分、正負が向きを表す、図 5 右）
  - 同じ質量の質点の衝突（$m_1 = m_2 = m$）、最初 2 が静止（$v_2 = 0$）
  - 運動量保存より

$$\begin{aligned} mv_1 &= mu_1 + mu_2 \\ v_1 &= u_1 + u_2 \\ u_2 &= v_1 - u_1 \end{aligned} \tag{65}$$

  - エネルギー保存より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 &= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 \\ v_1^2 &= u_1^2 + u_2^2 \\ v_1^2 &= u_1^2 + (v_1 - u_1)^2 \quad \text{(運動量保存 (65) を用いて } u_2 \text{ を消去)} \\ v_1^2 &= u_1^2 + v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2 \\ 0 &= 2u_1^2 - 2v_1u_1 \\ 0 &= (u_1 - v_1)u_1 \end{aligned}$$

    これより、衝突後の質点 1 の速度は（$AB = 0$ のとき、$A = 0$ または $B = 0$）

$$u_1 = v_1 \text{ または } 0 \tag{66}$$

    式 (65) を用いると u_2 が計算でき

$$(u_1, u_2) = (v_1, 0) \text{ または } (0, v_1) \tag{67}$$

  - 解 $(v_1, 0)$ は衝突前後で速度が変化していないので、衝突が起きなかった場合に対応する。よって衝突が起きた場合の衝突後の速度は

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1 \tag{68}$$

    質点 1 は静止し、質点 2 が衝突前の質点 1 と同じ速度で動き出す運動