2　質点系の運動

2.1　2 質点系

- **質点系**：複数の質点からなる物理系
  例）2 質点系：質点 1（位置 $\vec{r}_1$、質量 m_1）と質点 2（位置 $\vec{r}_2$、質量 m_2）の系

- **自由度**：系の状態を指定するために必要な変数の数
  例）1 つの質点の 1 次元運動：1 自由度（変数 x）
  　　1 つの質点の 3 次元運動：3 自由度（変数 x, y, z）
  　　2 質点系の 3 次元運動は **6 自由度**（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$）

- **外力**と**内力**（図 2）
  - 質点 1 にはたらく力：外力 $\vec{F}_1$ と質点 2 からの内力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$
  - 質点 2 にはたらく力：外力 $\vec{F}_2$ と質点 1 からの内力 $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$
  - 例）太陽の重力中の地球（質点 1）と月（質点 2）
    $\vec{F}_1$：太陽が地球におよぼす重力、$\vec{F}_{1\leftarrow 2}$：月が地球におよぼす重力
    $\vec{F}_2$：太陽が月におよぼす重力、$\vec{F}_{2\leftarrow 1}$：地球が月におよぼす重力

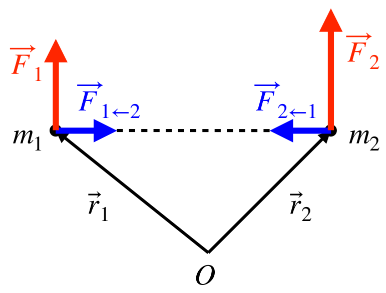

図 2: 2 質点系にはたらく力の例。

- 外力か内力かは系の範囲によって決まる
  例）太陽も系に含める場合は、太陽が地球におよぼす重力 $\vec{F}_1$ は内力

- 運動方程式

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} \tag{24}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{25}$$

  各成分を数えると式 (24) に 3 本、式 (25) に 3 本、合計 6 本（自由度の数）の運動方程式

- 作用反作用の法則（運動の第 3 法則）

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0} \tag{26}$$

  意味：内力の和はゼロ

2.2 重心座標の運動方程式

- **重心**（質量中心）座標：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{27}$$

2 つの位置ベクトルの間の線分を $m_2 : m_1$ の比で分割した点（図 3）

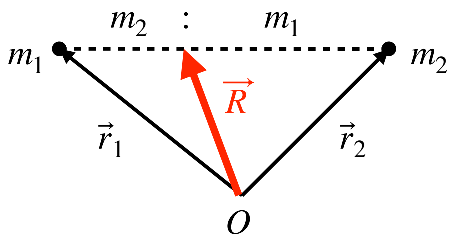

図 3: 重心座標 $\vec{R}$。

- **全質量**（系全体の質量）：

$$M = m_1 + m_2 \tag{28}$$

重心座標は以下のようにも書ける

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \tag{29}$$

- 2 質点系の重心座標の時間変化：重心座標と全質量の定義より

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{30}$$

両辺を時間で 2 回微分すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \tag{31}$$

運動方程式 (24)、(25) を代入すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1}) \tag{32}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{33}$$

作用反作用の法則より、内力の和は $\vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0}$ なので、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{34}$$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ は外力の和、つまり系全体にかかる力なのでこれを全外力 $\vec{F}_{外}$ とする

$$\vec{F}_{外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{35}$$

- **重心座標の運動方程式**：

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} \tag{36}$$

重心座標 $\vec{R}$ の運動は**質量 M の質点に全外力 $\vec{F}_{外}$ がかかった運動**と同じ

2.3 全運動量と全角運動量

- それぞれの質点の運動量

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} \tag{37}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{38}$$

- 系全体の運動量（全運動量）

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\
&= m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \\
&= (m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) \\
&= M\frac{d}{dt}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \\
&= M\frac{d\vec{R}}{dt}
\end{aligned}$$

運動方程式は

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} \tag{39}$$

全運動量の時間変化が全外力で与えられる

- それぞれの質点の角運動量と力のモーメント

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1, \quad \vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}), \quad \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{N}_1 \tag{40}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2, \quad \vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1}), \quad \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{N}_2 \tag{41}$$

- 系全体の角運動量（全角運動量）と力のモーメントを

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \tag{42}$$

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \tag{43}$$

とすれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{N} \tag{44}$$

2.4 力の性質と保存則

- **外力** $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{0}$ の場合
- 全外力

$$\vec{F}_{外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \tag{45}$$

- 重心座標の運動方程式

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} = \vec{0} \tag{46}$$

$\Rightarrow$ 重心は**加速度がゼロ**の運動（等速直線運動）

- 全運動量：

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{外} = \vec{0} \tag{47}$$

外力がない場合、**全運動量は保存**

- 全角運動量：

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times (\vec{0} + \vec{F}_{1\leftarrow 2}) + \vec{r}_2 \times (\vec{0} + \vec{F}_{2\leftarrow 1}) \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{1\leftarrow 2}) \quad \leftarrow (\text{作用反作用の法則}) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{1\leftarrow 2}\end{aligned}$$

- **内力が中心力**の場合
  - 力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ は 2 つの質点の位置座標を結ぶ方向にはたらく
  - ベクトル $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ と $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ は同じ方向を向く間の角度は $\theta = 0$ または $\theta = \pi$
  - 同じ方向を向いたベクトルの外積の大きさは 0

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

外力がなく、内力が中心力の場合、**全角運動量は保存**

- 運動量の保存は並進対称性、角運動量の保存は回転対称性の帰結