14　フーリエ級数展開

14.1　微分方程式の一般解と初期条件

- 1次元の微分方程式と一般解
  - 1質点の単振動の運動方程式（変数 $x(t)$ に対する微分方程式）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{236}$$

$$x = C\cos(\omega t + \phi) \tag{237}$$

  - バネでつながれた N 質点の運動方程式（変数 $u_j(t)$ に対する微分方程式）

$$m\frac{d^2u_j}{dt^2} = k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \tag{238}$$

$$u_j(t) = \sum_{n=1}^{N} C^{(n)} \sin\frac{nj\pi}{N+1}\cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \tag{239}$$

  - 波動方程式（変数 $u(x,t)$ に対する偏微分方程式）

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0 \le x \le L) \tag{240}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}^{(n)} \sin\left(p^{(n)}x\right)\cos\left(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}\right) \tag{241}$$

- 時間に関する微分方程式：ある時刻から次の時刻への変化率（時間微分）を決める
  $\rightarrow$ **初期条件**（最初の位置、速度）を決めたら後の時間の位置、速度が原理的にわかる
- 一般解：微分方程式を満たす関数が解析的に（式の形で）与えられたもの
  一般解が得られない問題もある（ナビエ・ストークス方程式など）$\rightarrow$ 数値計算で調べる
- 積分定数：一般解に含まれる、自由に決められる定数 $\leftrightarrow$ 初期条件と対応
- 初期条件を与えるために必要な**積分定数の数**
  - 1質点の場合、初期位置 x_0 と初期速度 v_0 の2個：(C, ϕ)

$$x_0 = C\cos\phi, \quad v_0 = C\omega\sin\phi \tag{242}$$

  - N 質点の場合、それぞれの初期位置と初期速度の $2N$ 個：$(C^{(n)}, \phi^{(n)}), n = 1, 2, \cdots, N$
  - 波動方程式（$N \rightarrow \infty$）の場合、無限個：$(\bar{C}^{(n)}, \phi^{(n)}), n = 1, 2, \cdots$

- 波動方程式の初期条件

$$u(x,0) = f(x) \tag{243}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{244}$$

$t=0$ で位置 x の変位が $f(x)$ という関数で、初速度が全て 0

- 条件 (244) より、$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \cdots = 0$（第 11 回演習問題）

- 条件 (243) より

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}^{(n)} \sin\left(p^{(n)}x\right) \quad (0 \le x \le L), \quad p^{(n)} = \frac{n\pi}{L} \tag{245}$$

どのように $\bar{C}^{(n)}$ を決めたら良いか？

14.2　フーリエ級数展開

- **フーリエ級数展開**：区間 $0 \le x \le L$ の関数 $f(x)$ を三角関数の無限和で表現、式 (245)

- 例：$L=\pi$ の場合（$p^{(n)} = n$）の関数 $f(x) = x$ の級数展開

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots\right] \tag{246}$$

項の数を増やすと $f(x) = x$ の直線に近づいていく（図 33）
関数がある種の性質を満たせば有限項での近似が有効

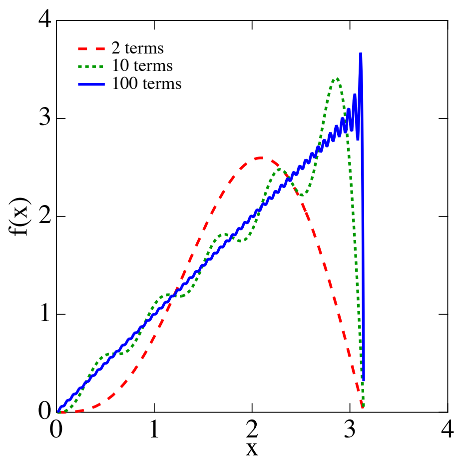

図 33: 区間 $0 \le x \le \pi$ での関数 $f(x) = x$ の $\sin(nx)$ によるフーリエ級数展開 (246)。破線：2 項での近似、点線：10 項での近似、実線：100 項での近似。

- 三角関数の**直交性**

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(p^{(m)}x)\sin(p^{(n)}x)dx = \delta_{nm} \tag{247}$$

δ_{nm} はクロネッカーのデルタ（$n=m$ のときのみ 1 でそれ以外は 0）

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{248}$$

- 式 (247) の説明：$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ より、$\sin A \sin B = [\cos(A-B) - \cos(A+B)]/2$、これを用いて

$$\begin{aligned}\frac{2}{L}\int_0^L \sin(p^{(n)}x)\sin(p^{(m)}x)dx &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\cos(p^{(n)}x - p^{(m)}x) - \cos(p^{(n)}x + p^{(m)}x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L \cos[(p^{(n)} - p^{(m)})x]dx - \frac{1}{L}\int_0^L \cos[(p^{(n)} + p^{(m)})x]dx\end{aligned}$$

i) $n \neq m$ の場合：$p^{(n)} - p^{(m)} \neq 0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{2}{L}\int_0^L \sin(p^{(n)}x)\sin(p^{(m)}x)dx &= \frac{1}{L}\left[\frac{\sin[(p^{(n)} - p^{(m)})x]}{p^{(n)} - p^{(m)}}\right]_0^L - \frac{1}{L}\left[\frac{\sin[(p^{(n)} + p^{(m)})x]}{p^{(n)} + p^{(m)}}\right]_0^L \\ &= \frac{1}{L}\frac{\sin[(p^{(n)} - p^{(m)})L]}{p^{(n)} - p^{(m)}} - \frac{1}{L}\frac{\sin[(p^{(n)} + p^{(m)})L]}{p^{(n)} + p^{(m)}} = 0\end{aligned}$$

ここで $\sin[(p^{(n)} \pm p^{(m)})L] = \sin[(n\pi/L \pm m\pi/L)L] = \sin[(n \pm m)\pi]$ であり、n, m はともに整数であるので $n \pm m$ も整数、よって $\sin[(n \pm m)\pi] = 0$

ii) $n = m$ の場合：$p^{(n)} = p^{(m)}$ なので

$$\begin{aligned}\frac{2}{L}\int_0^L \sin(p^{(n)}x)\sin(p^{(m)}x)dx &= \frac{1}{L}\int_0^L \cos[0]dx - \frac{1}{L}\int_0^L \cos[2p^{(n)}x]dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L 1\ dx - \frac{1}{L}\int_0^L \cos[2p^{(n)}x]dx \\ &= \frac{1}{L}[x]_0^L - \frac{1}{L}\left[\frac{\sin[2p^{(n)}x]}{2p^{(n)}}\right]_0^L \\ &= 1 - \frac{1}{L}\frac{\sin[2p^{(n)}L]}{2p^{(n)}}\end{aligned}$$

$p^{(n)} = n\pi/L$ なので $\sin[2p^{(n)}L] = \sin(2n\pi)$ となるが、n が整数なので $\sin(2n\pi) = 0$、よって

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(p^{(n)}x)\sin(p^{(m)}x)dx = 1 \quad (n=m)$$

- フーリエ級数展開 (245) の**係数 $\bar{C}^{(n)}$ の決定**

$$\bar{C}^{(n)} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(p^{(n)}x)dx \tag{249}$$

$\Rightarrow$ 初期変位 $f(x)$ から（無限個の）$\bar{C}^{(n)}$ を決定できる

- 確認：$f(x)$ の級数展開

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}^{(m)} \sin\left(p^{(m)}x\right) \tag{250}$$

を右辺に代入（和の添字 n は式 (249) 内に使われているので別の添字を使う）

$$\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(p^{(n)}x)dx &= \frac{2}{L}\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}^{(m)} \sin\left(p^{(m)}x\right)\sin(p^{(n)}x)dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}^{(m)} \left[\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(p^{(m)}x\right)\sin(p^{(n)}x)dx\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}^{(m)}\delta_{mn} \quad \leftarrow (247)
\end{aligned}$$

クロネッカーのデルタは $n = m$ のときのみ 1 でそれ以外は 0 なので

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}^{(m)}\delta_{mn} = \bar{C}^{(1)} \times 0 + \bar{C}^{(2)} \times 0 + \cdots + \bar{C}^{(n)} \times 1 + \cdots = \bar{C}^{(n)}$$

と式 (249) を得る（δ_{mn} をかけて m で和をとると、m を n で置き換えたものになる）

14.3 ベクトル空間との関係

- 3 次元空間のベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$
  - 内積

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{n=1}^{3} a_n b_n$$

  - 基底ベクトル $\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots$ の直交性と任意のベクトルの展開

$$(\vec{e}^{(n)}, \vec{e}^{(m)}) = \delta_{nm}, \quad \vec{a} = \sum_{n=1}^{3} a_n \vec{e}^{(n)}, \quad a_n = (\vec{a}, \vec{e}^{(n)})$$

    3 次元ベクトル空間をなす

- 区間 $0 \le x \le L$ の関数 $f(x)$
  - 内積

$$(f, g) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)g(x)dx$$

  - 基底関数 $e^{(n)}(x) = \sin(p^{(n)}x)$ の直交性と任意の関数の展開

$$(e^{(n)}, e^{(m)}) = \delta_{nm}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n e^{(n)}(x), \quad \bar{C}_n = (f, e^{(n)})$$

    無限次元ベクトル空間をなす