13　流体の力学

13.1　流体の性質

- **流体**：一定の形を持たず自由に変形する物質
  例）水、空気など

- **密度** ρ：単位体積あたりの質量、次元は $L^{-3}M$
  一般には時間と位置に依存するが、以下では定数とする（非圧縮で一様な流体）

- **圧力** p：流体内にはたらく単位面積あたりの力、次元は $L^{-1}MT^{-2}$
  例）水圧、気圧など
  圧力は等方的（どの方向にも同じ強さ）なのでスカラー量

- **流速** $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$：ある点での流体の速度、次元は LT^{-1}
  例）川の流れ、空気の風など
  速度には向きがあるのでベクトル量

- **粘性**（粘性係数）μ：流速を一様にする流体に固有の定数、次元は $L^{-1}MT^{-1}$
  流体の "摩擦力"：近接する部分の流速差を減らす

- 一般に $p, \vec{v}$ は時間 t と位置 $\vec{r}$ の関数 $p(t, \vec{r}), \vec{v}(t, \vec{r})$（c.f. 波動の媒質）
  ナビエ・ストークス方程式：流体の基本方程式

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{\rho}\vec{\nabla}^2\vec{v} + \vec{f} \tag{221}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{(連続の方程式)} \tag{222}$$

  $\vec{f}$ は単位質量あたりの外力（流体に外からはたらく力）、$\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$
  4 変数（p, v_x, v_y, v_z）に対する 4 つの非線形偏微分方程式、原理的には解ける
  一般解はミレニアム問題（賞金 100 万ドル）

- **完全流体**：粘性のない流体
  水や空気は粘性が小さいので近似的に完全流体とみなせる
  ヘリウムを極低温にすると超流動という粘性 0 の状態になる
  基本方程式：オイラー方程式（式 (221) で $\mu = 0$）

- **定常流**：流速の状況が時間変化しない流体（$\vec{v}$ は位置のみの関数 $\vec{v}(\vec{r})$）

- **流線**：ある点から流速ベクトルの方向をたどった曲線（川を流れる落ち葉の軌跡）
  流線上で流速ベクトル $\vec{v}$ は常に接線方向
  → 流線上では流速はスカラー量 v（符号は向きをあらわす）

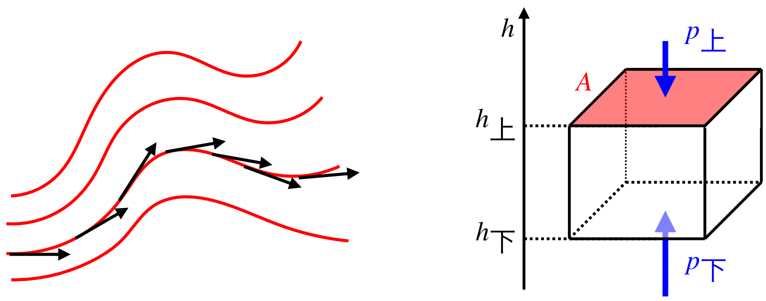

図 30: 左：流速ベクトルと流線の模式図、右：静止流体の上面と下面にはたらく圧力。

- **ベルヌーイの法則**：定常流の流線上で成り立つ法則、オイラー方程式から導かれる

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho\Omega = C \tag{223}$$

C：圧力の次元の定数、p や v は位置によって異なるが和が一定になる
Ω：単位質量あたりのポテンシャルエネルギー（$\vec{f} = -\vec{\nabla}\Omega$)、次元は L^2T^{-2}

- 以下ではベルヌーイの法則の簡単な応用を紹介

13.2 静止流体

- **静止流体**：粘性がなく流れていない流体（$v = 0$)
密度 ρ と圧力 p（静水圧）

- 重力中の静止流体：流速は 0、高さ h にある流体の Ω は

$$\Omega = gh \tag{224}$$

理由：質量 m の質点にはたらく重力のポテンシャルエネルギーは mgh
$\rightarrow$ ベルヌーイの法則より

$$p + \rho gh = C \tag{225}$$

$$p = C - g\rho h \tag{226}$$

圧力 0 になる高さを $h = h_0$ とすると $C = g\rho h_0$

- 静水圧は高さ h のみで決まる（同じ高さなら圧力は等しい）

- 浮力：静止流体中に底面積 A の物体をおく
物体の上面の高さと圧力を $h_{上}$、$p_{上}$、下面の高さと圧力を $h_{下}$、$p_{下}$
物体にはたらく力は鉛直上向きに

$$p_{下}A - p_{上}A = (C - g\rho h_{下})A - (C - g\rho h_{上})A = g\rho(h_{上} - h_{下})A \tag{227}$$

$(h_{上} - h_{下})A$ は物体の体積、$\rho(h_{上} - h_{下})A$ はその分の流体の質量
$\rightarrow$ **アルキメデスの原理**：流体中の物体の浮力は押しのけた流体に作用する重力に等しい

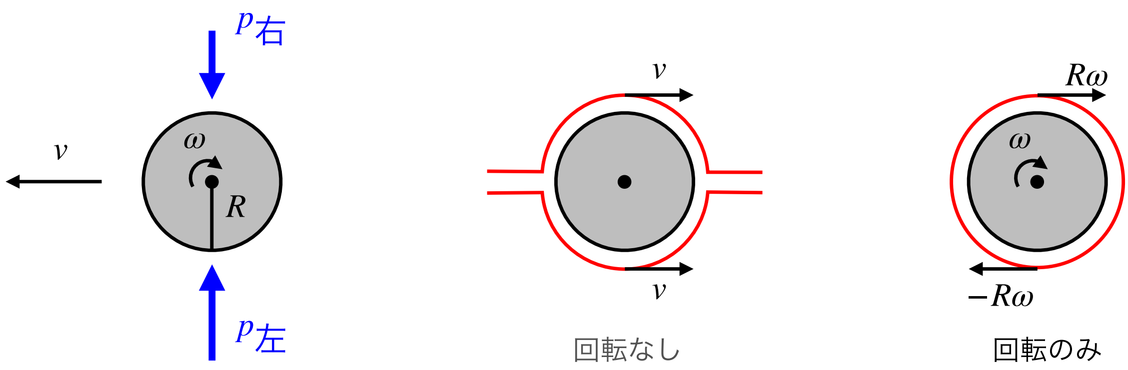

図 31: マグヌス効果の模式図。

13.3 完全流体

- 完全流体：粘性がない流体
  密度 ρ、圧力 p、流速 v

- ベルヌーイの法則で外力が無視できる、あるいは一定のとき

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = C \tag{228}$$

$$p = C - \frac{\rho v^2}{2} \tag{229}$$

- **マグヌス効果**：静止している流体中を速度 v で運動する回転する球体
  球体の半径を R、時計回りに角速度 $\omega > 0$
  球体と共に速度 v で運動する座標系で球の右と左の流線を考える

  – 回転がない場合：流速は球の右側も左側も同じ v

  – 回転のみの場合：流体のまわりに回転流（循環）、右側は $+R\omega$、左側は $-R\omega$
  （注：この流れの原因は粘性）

  – 両方合わせると

$$v_{右} = v + R\omega > v - R\omega = v_{左} \tag{230}$$

  – 圧力は

$$p_{右} = C - \frac{\rho v_{右}^2}{2} < C - \frac{\rho v_{左}^2}{2} = p_{左} \tag{231}$$

  → 球体は右向きの力を受ける（流れの方向に垂直）

- 揚力：飛行機の翼は上面の流速が下面より速い
  $v_{上} > v_{下} \to p_{上} < p_{下} \to$ 上むきの力（揚力）がはたらく

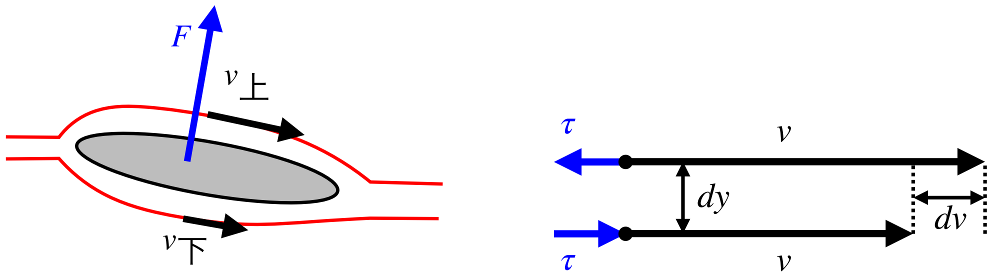

図 32: 左：揚力の模式図、右：粘性力 τ の模式図。

13.4 粘性のある流体

- 粘性 μ、密度 ρ、圧力 p、流速 v
- 滑りなしの条件：流体中の物体の表面では、流速と物体の相対速度は 0
- 粘性力 τ（圧力の次元）：流速の差を減らそうとする力
  流速に垂直な方向に微小距離 dy だけ離れた 2 点での流速の差が dv のとき
  $$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \tag{232}$$
  dv/dy は速度勾配
- 静止している粘性流体中を運動する物体
  → 滑りなしの条件より物体のまわりに速度勾配
  → 運動を妨げる粘性力がはたらく
  - 速度 v が小さいとき：粘性抵抗（ナビエ・ストークス方程式の線形項）
    $$F_{粘} \propto \mu v L \tag{233}$$
    L は物体の長さスケール
  - v が大きいとき：慣性抵抗（ナビエ・ストークス方程式の非線形項）
    $$F_{慣} \propto \rho v^2 L^2 \tag{234}$$
- レイノルズ数：慣性抵抗と粘性抵抗の比
  $$R = \frac{\rho v L}{\mu} \tag{235}$$
  無次元化したナビエ・ストークス方程式の唯一の定数
  → レイノルズ数が同じ流れは相似則に従う