

## 12 弾性体の力学

### 12.1 弾性体とは

- **弾性体**：力を加えると変形する物体  
例) バネ、ゴム、固体など
- **弾性**：変形度が小さい場合に、力を取り除くと元の形に戻る性質 → 復元力がはたらく
- 1次元の弾性体（バネ）のフックの法則：復元力  $F$  は変位  $x$  に比例（ $x$  が小さいとき）

$$F = -kx \quad (205)$$

バネ定数  $k$  はバネごとに異なる（材質固有の性質）

- 加える力をより強くしていくと（図 27 左）
  - 比例限界：フックの法則が成り立たなくなる
  - 弾性限界：力を取り除いても元に戻らない（バネが伸びきる塑性変形）
  - 破壊点：弾性体が破壊される点（バネがちぎれる）
- 3次元の弾性体（ゴムの塊）：様々な変形と復元力、対応関係は（ただし符号と次元に注意）
  - 変位 → ひずみ
  - 復元力 → 応力
  - バネ定数 → 弾性定数
- 一般にはひずみと応力は空間の各点で定義されたテンソル  
以下では等方（どの方向も同じ）で一様（どの部分も同じ）な弾性体を考える

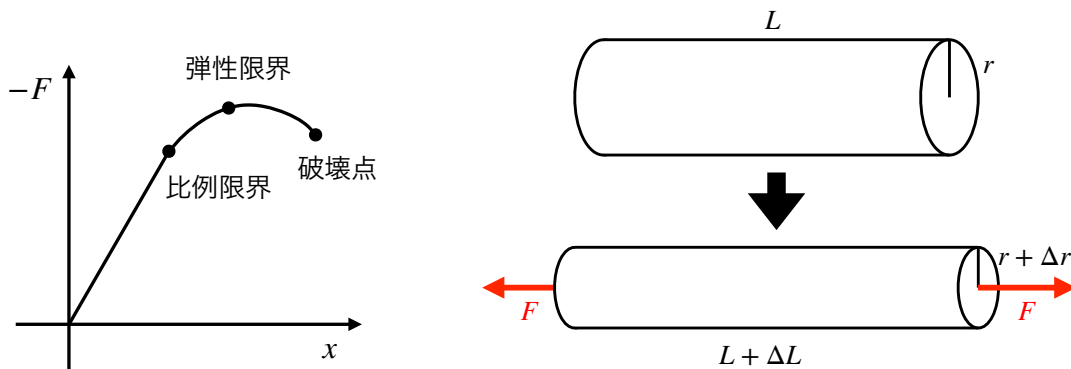


図 27: 左：弾性体の変位  $x$  と復元力  $F$  の関係の模式図。右：円柱型の弾性体の変形。

## 12.2 ひずみと応力

- 円柱型の弾性体を力  $F$  で長さ方向に引っ張る (図 27 右)
  - 変形前：長さ  $L$ 、半径  $r$
  - 変形後：長さ  $L + \Delta L$ 、半径  $r + \Delta r$
  - 変位： $\Delta L$ 、 $\Delta r$ 、どちらも微小、 $\Delta L > 0$ 、通常は  $\Delta r < 0$

- **微小量**： $\delta \ll 1$  ( $\delta$  は 1 より十分小さい)

具体的に  $\delta = 10^{-3} = 0.001$  とすると、

$$\delta^0 = 1, \quad \delta^1 = 10^{-3} = 0.001, \quad \delta^2 = 10^{-6} = 0.00001, \quad \dots \quad (206)$$

となるので  $\delta^{n+1}$  は  $\delta^n$  より十分小さい

「微小量の 1 次まで考慮する」という場合、2 次以上を

$$\mathcal{O}(\delta^2) = a\delta^2 + b\delta^3 + \dots \quad (207)$$

という記号で表し、これを無視する

異なるべき乗を足し合わせるので微小量は無次元

- **ひずみ**：単位長さあたりの変位、次元は無次元

$$(\text{ひずみ}) = \frac{\Delta L}{L} \quad (208)$$

理由：変位  $\Delta L$  は弾性体の長さ  $L$  に比例するため (c.f. バネを 2 つ直列につなぐ)

- **応力**：弾性体の単位面積あたりにかかる力、次元は  $L^{-1}MT^{-2}$  (圧力と同じ)

$$(\text{応力}) = \frac{F}{A}, \quad A = \pi r^2 \quad (209)$$

符号は外向きが正 (弾性体にはたらく力なので復元力と反対向き)

- フックの法則：ひずみが微小なとき、応力はひずみに比例

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (210)$$

比例係数は**ヤング率**  $E$ 、次元は  $L^{-1}MT^{-2}$

- **弾性定数**：ヤング率などの応力とひずみの比例係数

- **ポアソン比**  $\sigma$ ：応力に垂直な方向 (半径方向) のひずみと応力方向 (長さ方向) のひずみの比

$$-\frac{\Delta r}{r} = \sigma \frac{\Delta L}{L} \quad (211)$$

通常は  $\Delta L > 0$ 、 $\Delta r < 0$  (長さが伸びたら幅が縮む) なので  $\sigma > 0$

稀に  $\sigma < 0$  (長さが伸びたら幅が広がる) の物質も存在

- 硬い弾性体： $E$  大、 $\sigma$  小

やわらかい弾性体： $E$  小、 $\sigma$  大

体積一定の変形の場合は  $\sigma = 1/2$

### 12.3 圧縮変形とずれ変形

- 圧縮変形：弾性体の表面全体に圧力  $p$ （内向きが正）をかけて小さくする
  - 変形前：体積  $V$
  - 変形後：体積  $V + \Delta V$ （体積変化  $\Delta V$  は微小で符号は負）
- **体積弾性率**  $K$ 、次元は  $L^{-1}MT^{-2}$ （圧力と同じ）

$$p = -K \frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} p \quad (212)$$

$1/K$  が大きい（小さい）：同じ圧力でより大きく（小さく）圧縮される  
 →  $1/K$  は圧縮率と呼ばれる

- ずれ変形：断面が正方形の弾性体の側面に平行に応力  $\tau$  をかける
  - 変形前：断面の正方形の角度が  $\pi/2$
  - 変形後：断面のひし形角度が  $\pi/2 + \Delta\theta$  と  $\pi/2 - \Delta\theta$ 、体積は変えない
- **ずれ弾性率**  $\mu$ 、次元は  $L^{-1}MT^{-2}$ （圧力と同じ）

$$\tau = \mu \Delta\theta \quad (213)$$

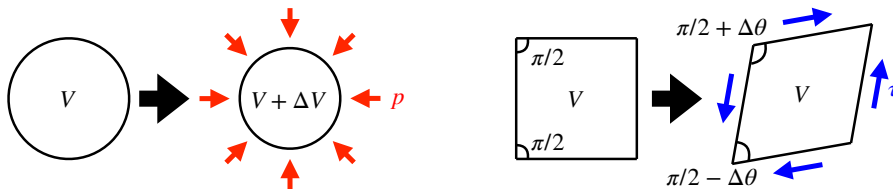


図 28: 左：圧縮変形、右：ずれ変形。

### 12.4 弾性定数の関係

- 弾性定数の間の関係式

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad (214)$$

体積一定の変形はポアソン比が  $\sigma \rightarrow 1/2$ 、このとき  $K \rightarrow \infty$  で圧縮できない（非圧縮）

- 式 (214) の説明 ( $\sigma > 0$  の場合)：
  - 一辺  $L$  の立方体の全ての面に圧力  $p$ 、各辺が  $L + \Delta L$  ( $\Delta L$  の符号は負) に変化 (図 29 左)

- 体積弾性率:  $V = L^3$  で体積変化は  $\Delta V = (L + \Delta L)^3 - L^3$  なので、 $\delta = \Delta L/L$  とすると

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(L + \Delta L)^3 - L^3}{L^3} = (1 + \delta)^3 - 1 = [1 + 3\delta + \mathcal{O}(\delta^2)] - 1 = 3\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

であり各面の圧力は  $p$  なので、 $\delta$  の 2 次以上を無視すると

$$p = -K \frac{\Delta V}{V} = -3K\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{1}{3K}p \quad (215)$$

- ヤング率とポアソン比:  $x, y, z$  方向の応力を別々に考える

$$\underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{x \text{ 方向のひずみ}} = \delta = \underbrace{\delta_x}_{x \text{ 方向の応力の寄与}} + \underbrace{\delta_y}_{y \text{ 方向}} + \underbrace{\delta_z}_{z \text{ 方向}} \quad (216)$$

$x$  方向の応力で短くなり ( $\delta_x < 0$ )、 $y, z$  方向からの応力で長くなる ( $\delta_y > 0, \delta_z > 0$ )

- $x$  方向の応力は  $-p$  (符号は外向きが正) で、 $x$  方向の長さが縮むため

$$-p = E\delta_x \quad \Rightarrow \quad \delta_x = -\frac{1}{E}p \quad (217)$$

- $y$  方向の応力による  $y$  方向のひずみは上と同じく  $-p/E$ 、このとき  $x$  方向は応力に垂直な方向のひずみなので、ポアソン比を使って

$$-\delta_y = \sigma \left( -\frac{1}{E}p \right) \quad \Rightarrow \quad \delta_y = \frac{\sigma}{E}p \quad (218)$$

同様に  $z$  方向の応力による  $x$  方向のひずみは  $\delta_z = \sigma p/E$  (図 29 右)

- 以上より

$$\delta = -\frac{1}{E}p + \frac{\sigma}{E}p + \frac{\sigma}{E}p = -\frac{1}{E}(1 - 2\sigma)p \quad (219)$$

式 (215) と比較して

$$-\frac{1}{3K} = -\frac{1}{E}(1 - 2\sigma) \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \quad (220)$$

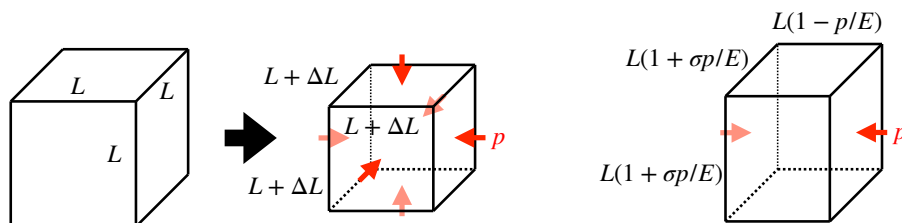


図 29: 1 辺  $L$  の立方体に圧力  $p$  をかけたときの変形。左: 全ての面に圧力をかけた場合。右: 一つの方向のみに圧力をかけた場合。