11　波動方程式

11.1　連続自由度の振動

- N 自由度の振動の運動方程式

$$m\frac{d^2u_j}{dt^2} = k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, N, N+1) \tag{183}$$

- ばねの長さが無限に小さい場合、質点は連続的に分布 → 波動の媒質とみなせる

- **連続極限**：質点間の距離 $a \to 0$ の極限を考える
  このとき質点の数 $N \to \infty$ として連続体の長さ $L = a(N+1)$ を一定に保つ

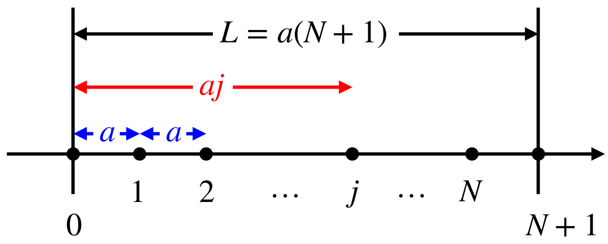

図 26: N 自由度系の質点の左端からの距離。

- 左端から j 番目の質点までの距離 → 左端から測った媒質の位置座標 x

$$aj \quad (0 \le j \le N+1) \quad \to \quad x \quad (0 \le x \le L) \tag{184}$$

- 変位の表記：j 番目の質点の変位 → 位置 x の媒質の変位

$$u_j(t) \to u(x,t) \tag{185}$$

- 境界条件：連続体の端で変位は 0

$$u_0(t) = 0 \quad \to \quad u(0,t) = 0 \tag{186}$$

$$u_{N+1}(t) = 0 \quad \to \quad u(L,t) = 0 \tag{187}$$

- 時間微分：変位 $u(x,t)$ は位置 x と時間 t の関数なので、t に関する偏微分になる
  偏微分 $\partial/\partial t$ については補足参照

$$\frac{d^2u_j(t)}{dt^2} \to \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{188}$$

- 空間微分：$aj = x$ のとき $a(j+1) = x + a$、$a(j-1) = x - a$

$$\frac{u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)}{a^2} = \frac{u(x+a,t) + u(x-a,t) - 2u(x,t)}{a^2} \to \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{189}$$

証明：$f(x \pm \Delta, y)$ を x, y のまわりで Taylor 展開すると

$$
\begin{aligned}
f(x \pm \Delta, y) &= f(x,y) \pm \Delta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\pm\Delta)^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= f(x,y) \pm \Delta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta^3)
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
& f(x+\Delta, y) + f(x-\Delta, y) - 2f(x,y) \\
&= f(x,y) + \Delta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\
&\quad + f(x,y) - \Delta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - 2f(x,y) + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= \Delta^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta^3)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta, y) + f(x-\Delta, y) - 2f(x,y)}{\Delta^2} = \lim_{\Delta \to 0} \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta) \right] = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}
$$

- （位相）速度 v：ばね定数と質量の極限（次元は LT^{-1}）

$$
\frac{ka^2}{m} \to v^2 \tag{190}
$$

- N 自由度の運動方程式 $\to$ **波動方程式**（1 次元）

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2 u_j}{dt^2} &= k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \\
\frac{d^2 u_j}{dt^2} &= \frac{ka^2}{m} \frac{u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j}{a^2} \\
\to \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{191}
$$

線形偏微分方程式：重ね合わせの原理が成立

11.2 波動方程式の一般解

- 一般解は無限個の基準振動の重ね合わせ
- N 自由度の基準振動

$$
u_j(t) = C_j \cos(\omega t + \phi) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, N, N+1) \tag{192}
$$

連続自由度の基準振動（フーリエ変換、モード展開）

$$
u(x,t) = C(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (0 \le x \le L) \tag{193}
$$

- 波動方程式に代入

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2[C(x)\cos(\omega t+\phi)]}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2[C(x)\cos(\omega t+\phi)]}{\partial x^2} \\
C(x)[-\omega^2\cos(\omega t+\phi)] &= v^2\cos(\omega t+\phi)\frac{d^2C(x)}{dx^2} \\
-\omega^2 C(x) &= v^2\frac{d^2C(x)}{dx^2} \\
\frac{d^2C(x)}{dx^2} &= -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 C(x)
\end{aligned}
$$

(引数が x のみになったら偏微分を常微分で置き換えて良い)
境界条件：任意の時刻 t で $u(0,t)=u(L,t)=0$ なので

$$C(0)=C(L)=0 \tag{194}$$

- 振幅 $C(x)$ の解（$\bar{C}$ は実数の積分定数）：

$$C(x)=\bar{C}\sin(px)\,,\quad p=\frac{\omega}{v} \tag{195}$$

初期位相（$px+\varphi$ の φ）は $C(0)=0$ を満たすように選んだ
振動数 ω は p で決まる $\to$ p **に対する条件**を調べる

- 境界条件 (194)：$x=0$ では $C(0)=\bar{C}\sin(0)=0$ より OK、$x=L$ では

$$C(L)=\bar{C}\sin(pL) \tag{196}$$

これが 0 になるには、$\bar{C}=0$ は自明な解なので、

$$\sin(pL)=0 \quad\Rightarrow\quad pL=n\pi,\quad n：整数 \tag{197}$$

$$p=\frac{n\pi}{L} \tag{198}$$

$n=0$ は自明な解、$n<0$ は $n>0$ で表現できるので

$$p^{(n)}=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{199}$$

n に上限がない：無限個の $p^{(n)}$ とそれに対応する基準振動

- $p^{(n)}$ は**波数**、長さの逆数の次元
波長：位置 x と $x+\lambda^{(n)}$ の変位が同じになる長さ

$$\bar{C}^{(n)}\sin(p^{(n)}x)=\bar{C}^{(n)}\sin[p^{(n)}(x+\lambda^{(n)})]=\bar{C}^{(n)}\sin(p^{(n)}x+p^{(n)}\lambda^{(n)}) \tag{200}$$

$$\lambda^{(n)}=\frac{2\pi}{p^{(n)}}=\frac{2L}{n} \tag{201}$$

n ごとに異なる波長の基準振動になっている

- 基準振動（$n=1,2,3,\cdots$）

$$u^{(n)}(x,t) = \bar{C}^{(n)} \sin\left(p^{(n)}x\right) \cos\left(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}\right) \quad (0 \le x \le L) \tag{202}$$

$$p^{(n)} = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega^{(n)} = p^{(n)}v = \frac{n\pi}{L}v \tag{203}$$

  これは波動方程式 (191) を満たしている

- **一般解**：基準振動の重ね合わせ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}^{(n)} \sin\left(p^{(n)}x\right) \cos\left(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}\right) \quad (0 \le x \le L) \tag{204}$$

  積分定数は $(\bar{C}^{(n)}, \phi^{(n)})$ で合計無限個

11.3 進行波と定在波

- 基準振動は位相 $\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}$ がどの x でも同じ：位相がそろった**定在波**
- **進行波**：速度 v 一定で変位が伝播する波
  - 速度 $v = \omega/p > 0$ で x 軸正の向きに進む波（A：振幅、ϕ：初期位相）

$$\begin{aligned} u_+(x,t) &= A\sin(\omega t - px + \phi) \\ &= A\sin[(\omega t + \phi) - px] \\ &= A[\sin(\omega t + \phi)\cos(px) - \cos(\omega t + \phi)\sin(px)] \end{aligned}$$

  - 速度 $v = -\omega/p < 0$ で負の向きに進む波

$$\begin{aligned} u_-(x,t) &= A\sin(\omega t + px + \phi) \\ &= A[\sin(\omega t + \phi)\cos(px) + \cos(\omega t + \phi)\sin(px)] \end{aligned}$$

  - 速度の大きさ：波動方程式よりどちらも $v^2 = (\omega/p)^2$
  - 進行方向は $t=0$ と $t \neq 0$ での変位の平行移動からわかる（補足参照）
- 進行波は $\cos(px)$ の項を含む：境界条件 $u(0,t)=0$ を満たしていない
- u_+ と u_- の重ね合わせ（線形結合）

$$-u_+(x,t) + u_-(x,t) = 2A\sin(px)\cos(\omega t + \phi)$$

  基準振動と同じ関数形：位相がそろった定在波は進行波の重ね合わせで表現できる