10　モード分解と多自由度の振動

10.1　2 自由度の振動のモード分解

- 2 自由度の運動方程式

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2kx_1 + kx_2 \tag{165}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -2kx_2 + kx_1 \tag{166}$$

- 基準振動の特徴：振動数 ω と初期位相 ϕ は x_1, x_2 で共通（振幅 C のみ異なる）
  モード分解：解の形を

$$x_1 = C_1\cos(\omega t + \phi), \quad x_2 = C_2\cos(\omega t + \phi) \tag{167}$$

と**仮定して**運動方程式に代入（後述のフーリエ展開に相当）

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -2kx_1 + kx_2 \\ m[-\omega^2 C_1\cos(\omega t+\phi)] &= -2kC_1\cos(\omega t+\phi) + kC_2\cos(\omega t+\phi) \\ -m\omega^2 C_1 &= -2kC_1 + kC_2 \end{aligned} \tag{168}$$

同様に

$$-m\omega^2 C_2 = kC_1 - 2kC_2 \tag{169}$$

式 (168) と式 (169) をまとめて行列の式として書くと

$$\begin{aligned} -m\omega^2\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$C_1 = C_2 = 0$（自明な解）以外の解は、係数行列の行列式が 0 である必要があり

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} &= (m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 \\ &= (m\omega^2 - 2k - k)(m\omega^2 - 2k + k) \\ &= m^2\left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad \omega^2 &= \frac{k}{m} \text{ or } \frac{3k}{m} \end{aligned}$$

基準振動の振動数 ω_X、ω_Y を再現する

10.2 N 自由度の振動

- ばね 1、質点 1、ばね 2、質点 2、、、ばね N、質点 N、ばね $N+1$（図 24）
- 質点の質量は全て m、ばね定数は全て k
- つりあいの位置からの質点 j の変位を u_j（$j=1,2,\cdots,N$)、右向きが正
- 質点 1 への力：ばね 1 から $-ku_1$、ばね 2 から $k(u_2-u_1)$
- 質点 j（$j=2,3,\cdots,N-1$）への力：ばね j から $-k(u_j-u_{j-1})$、ばね $j+1$ から $k(u_{j+1}-u_j)$
- 質点 N への力：ばね N から $-k(u_N-u_{N-1})$、ばね $N+1$ から $-ku_N$

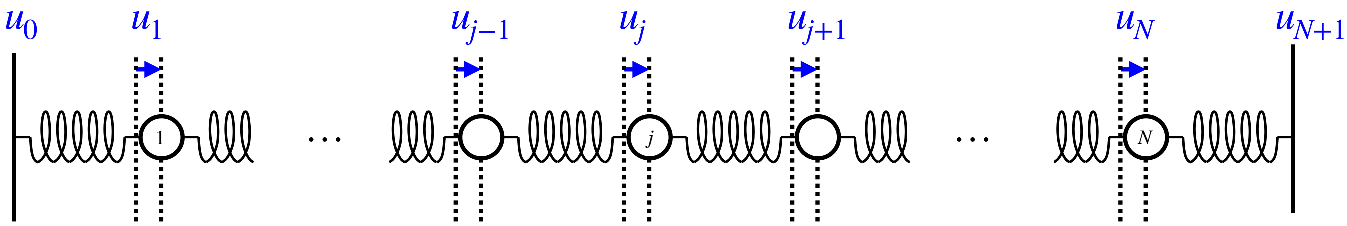

図 24: N 自由度の振動。

- 運動方程式（連立微分方程式）

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2u_1}{dt^2} &= -ku_1+k(u_2-u_1) = ku_2-2ku_1 \\
&\vdots \\
m\frac{d^2u_j}{dt^2} &= -k(u_j-u_{j-1})+k(u_{j+1}-u_j) \\
&= ku_{j+1}+ku_{j-1}-2ku_j \quad (j=2,3,\cdots,N-1) \\
&\vdots \\
m\frac{d^2u_N}{dt^2} &= -ku_N-k(u_N-u_{N-1}) = ku_{N-1}-2ku_N
\end{aligned}
$$

- まとめて書くと

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2u_j}{dt^2} &= ku_{j+1}+ku_{j-1}-2ku_j \\
&= k(u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j) \quad (j=1,2,\cdots,N)
\end{aligned}
\tag{170}
$$

ただし、任意の時刻 t で**境界条件**

$$
u_0 = u_{N+1} = 0 \tag{171}
$$

(動かない壁の変位と考えても良い)

10.3　一般解

- 一般解は N 個の基準振動の重ね合わせ、$2N$ 個の積分定数を含む $\to$ まず基準振動を求める
- モード展開：

$$u_j = C_j \cos(\omega t + \phi) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, N, N+1) \tag{172}$$

の形を仮定すると

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} = C_j \omega \frac{d}{dt}[-\sin(\omega t + \phi)] = -C_j \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

なので、運動方程式より

$$\begin{aligned} m\frac{d^2 u_j}{dt^2} &= k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \\ -mC_j\omega^2 \cos(\omega t + \phi) &= k[C_{j+1}\cos(\omega t + \phi) + C_{j-1}\cos(\omega t + \phi) - 2C_j \cos(\omega t + \phi)] \\ -\omega^2 C_j &= \frac{k}{m}(C_{j+1} + C_{j-1} - 2C_j) \qquad (173) \end{aligned}$$

境界条件：任意の時刻 t で $u_0 = u_{N+1} = 0$ なので

$$C_0 = C_{N+1} = 0 \tag{174}$$

式 (173) と式 (174) を満たす振幅 C_j によって式 (172) が基準振動を表す

- 振幅 C_j の解（C、p は実数の定数)：

$$C_j = C\sin(pj) \quad (j = 0, 1, , \cdots, N+1) \tag{175}$$

（式 (173) 右辺は連続極限で 2 階微分になるので三角関数が解になる）

- 式 (173) に代入して

$$\begin{aligned} -\omega^2 C\sin(pj) &= \frac{k}{m}[C\sin(pj+p) + C\sin(pj-p) - 2C\sin(pj)] \\ \omega^2 \sin(pj) &= -\frac{k}{m}[\sin(pj)\cos p + \cos(pj)\sin p \\ &\qquad + \sin(pj)\cos p - \cos(pj)\sin p - 2\sin(pj)] \\ \omega^2 \sin(pj) &= -\frac{k}{m}[2\sin(pj)\cos p - 2\sin(pj)] \\ \omega^2 &= 2\frac{k}{m}(1 - \cos p) \\ \omega^2 &= 4\frac{k}{m}\sin^2\frac{p}{2} \\ \omega &= 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p}{2} \quad (\omega > 0 \text{ を選んだ}) \end{aligned}$$

振動数 ω は p によって決まる $\to$ p **に対する条件**を調べる

- 境界条件 (174)：$j=0$ では $C_0 = C\sin(0) = 0$ より OK、$j = N+1$ では

$$C_{N+1} = C\sin[p(N+1)] \tag{176}$$

これが 0 になるには、$C=0$ だと全ての $C_j = 0$ で意味のない解（自明な解）になるので

$$\sin[p(N+1)] = 0 \quad \Rightarrow \quad p(N+1) = n\pi, \quad n：\text{整数} \tag{177}$$

$$p = \frac{n\pi}{N+1} \tag{178}$$

p は n によって決まる → n **に対する条件**を調べる

- 可能な n の値

$$C_j = C\sin\frac{nj\pi}{N+1} \tag{179}$$

  - $n = 0, N+1, \cdots$ の場合は全ての $C_j = 0$（自明な解）
  - $\sin(-x) = -\sin x$ より、$n<0$ の解は C の符号を変えた $n>0$ の解
  - 周期性 $\sin(2j\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$（$j$ は整数）より、$N+1$ に n を足した解は

$$\begin{aligned} C_j &= C\sin\frac{[(N+1)+n]j\pi}{N+1} = C\sin\frac{[2(N+1)+n-(N+1)]j\pi}{N+1} \\ &= C\sin\left(2j\pi - \frac{[(N+1)-n]j\pi}{N+1}\right) = -C\sin\frac{[(N+1)-n]j\pi}{N+1} \end{aligned}$$

  となり（C の符号を変えることで）$(N+1)-n$ の解で表現できる

  - よって n の値は $n = 1, 2, \cdots, N$ として良い ⇒ N **個の独立な基準振動**
  - n ごとに定数 C を自由に選べる

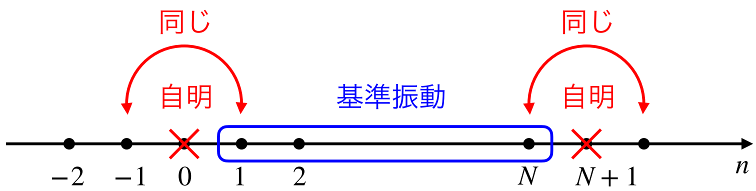

図 25: とりうる n の値の模式図。

- $n = 1, 2, \cdots, N$ の基準振動：

$$u_j^{(n)}(t) = C^{(n)}\sin\frac{nj\pi}{N+1}\cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \quad (j = 0, 1, \cdots, N+1) \tag{180}$$

$$\omega^{(n)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{n\pi}{2(N+1)} \tag{181}$$

- **一般解**：基準振動の重ね合わせ

$$u_j(t) = \sum_{n=1}^{N} C^{(n)}\sin\frac{nj\pi}{N+1}\cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \quad (j = 0, 1, \cdots, N+1) \tag{182}$$

積分定数は $(C^{(n)}, \phi^{(n)})$ で合計 $2N$ 個