1　数学・力学の基礎の復習

1.1　ベクトル

- 3次元空間の位置、力などの物理量はベクトルで表される
- **ベクトル**：x, y, z のように3つの成分を持つ量（太字 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}, \cdots$ で表記されることもある）

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{1}$$

行列を扱わない場合は縦書きでも横書きでも良い
x, y, z 成分を $1, 2, 3$ と表記する場合もある（$x = r_1,\ y = r_2,\ z = r_3$）

- ゼロベクトル：すべての成分が0のベクトル

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- **スカラー**：1成分のみの数（ベクトルの一つの成分（x, F_x など）はスカラー）

$$m, \quad x, \quad \cdots \tag{3}$$

- ベクトルとスカラーは足し引きできない $\rightarrow$ 等式の両辺で**ベクトル/スカラーは常に一致**

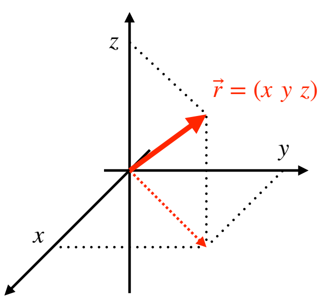
$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{ゼロベクトル}} \tag{4}$$

簡略的に $\vec{F} = 0$ のように表記する本もあるがこの授業では必ず $\vec{F} = \vec{0}$ とする

- **内積**（スカラー積、結果がスカラー）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{5}$$

$(\vec{a}, \vec{b})$ と表記することもある



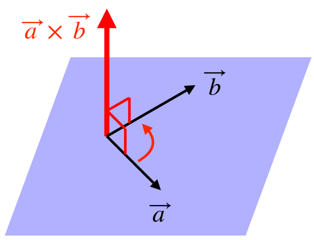


図 1: 左：位置ベクトル $\vec{r}$。右：ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積。

- **外積**（ベクトル積、結果がベクトル）

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{x\text{ 成分}} & \underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{y\text{ 成分}} & \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{z\text{ 成分}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

  $\vec{a} \times \vec{b}$ のベクトルは $\vec{a}, \vec{b}$ 両方と直交し、向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじが進む方向（図 1）

- ベクトルの 2 乗：内積の意味での自分との掛け算

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{7}$$

- ベクトルの大きさ（長さ、ノルム）

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{8}$$

- 内積、外積の大きさ（θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の角度）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta \tag{9}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta \tag{10}$$

  – $\theta = \pi/2 = 90^\circ$（直角）のとき（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する、という）、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$
  – $\theta = 0 = 0^\circ$（同じ向き）のとき、$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

1.2 数学記号

- **微分**：関数 $f(x)$ の変化量

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{11}$$

  別の書き方

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad df(x)/dx, \quad \cdots \tag{12}$$

  ただし分子の d は常に微分する関数（今の場合 f）より左に書く
  参考）積分の dx を被積分関数より前に書いても良い

$$\int f(x)dx = \int dx\ f(x) \tag{13}$$

- ベクトルの微分：各成分の微分

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \tag{14}$$

- 和記号

$$\sum_{i=1}^{3} C_i = C_1 + C_2 + C_3, \quad \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \tag{15}$$

和の上限、下限が明らかなとき、あるいは特に指定が必要ないときは、省略することもある
ベクトルの添字（$\vec{r}_i$ の i）を成分と混同しないこと

- 和記号と微分：微分と和は交換する

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{16}$$

1.3　物理量の次元

- 物理量は全て**次元**を持っている
- 基本的な次元
  - 長さ L：空間をはかる基準
  - 質量 M：重さをはかる基準
  - 時間 T：時間をはかる基準
- 複合的な次元：基本的な次元の組み合わせ、LMT のベキ乗で表現
例）速度（ベクトル量の次元は成分の次元）

$$\text{速度の次元} = \frac{\text{距離の次元}}{\text{時間の次元}} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- 次元が異なる量は足し引きできない → 等式の両辺で**次元は常に一致**
例）質量は M、加速度は LT^{-2} なので、運動方程式より

$$\text{力の次元} = \text{質量の次元} \times \text{加速度の次元} = M \times LT^{-2} = LMT^{-2}$$

- $L^0M^0T^0$ の量：無次元量

1.4　運動方程式

- **ニュートンの運動方程式**：位置 $\vec{r}$ にある質量 m の質点が、力 $\vec{F}$ を受けている場合

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{17}$$

各成分は 1 成分の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x$

- 速度 $\vec{v}$：位置の時間変化、次元 LT^{-1}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{18}$$

力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$)、質点は速度を変えない（$d\vec{v}/dt = \vec{0}$)：慣性の法則

- 加速度 $\vec{a}$：速度の時間変化、次元 LT^{-2}

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \vec{F} \tag{19}$$

$\vec{F} \neq \vec{0}$ で質点に力がはたらくとき、$\vec{F}$ の向きに加速度 $\vec{a}$ が生じる：運動の法則

- 運動量 $\vec{p}$：次元 LMT^{-1}

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{20}$$

力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$)、運動量が保存（時間に依存しない）

- 角運動量 $\vec{L}$：回転に対する「運動量」、次元 L^2MT^{-1}

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{21}$$

- 力のモーメント $\vec{N}$：回転に対する「力」次元 L^2MT^{-2}

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{22}$$

角運動量、力のモーメントは座標原点（$\vec{r}$ の始点）に依存する
（$**$ のまわりの角運動量、$**$ を基準とした力のモーメント、など）

- 回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{23}$$

力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$ つまり $\vec{N} = \vec{0}$)、角運動量が保存（時間に依存しない）

1.5 質点、質点系、剛体（前半の課題と目標）

- **質点**：大きさがない物体（回転できない）
前期の授業：1 つの質点の運動

- 現実の物体は大きさを持ち、回転できる（柔らかい物体は変形もできる）
  - 物体が斜面を転がり落ちる場合と、斜面を滑り落ちる場合は異なる運動

- **質点系**：複数の質点の集まり（第 2 回、第 3 回）
例）太陽と月と地球の重力など

- **剛体**：大きさを持った物体（回転できるが変形しない物体、第 4 回以降）
例）コマ、滑車など