9　回転運動と角運動量

教科書 p.76-p.81

9.1　回転運動の法則

- 今日の目標：位置 $\vec{r}$ にある質量 m の質点の**回転運動**の物理法則を理解する
  剛体（大きさがある物体）の回転運動の準備
- **角運動量**：位置座標 $\vec{r}$ と運動量 $\vec{p}$ の外積、次元 L^2MT^{-1}
  $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{156}$$
  回転に対する "運動量"
- **力のモーメント**（トルク）：位置座標 $\vec{r}$ と質点にかかる力 $\vec{F}$ の外積、次元 L^2MT^{-2}
  $$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{157}$$
  回転に対する "力"
- 角運動量、力のモーメントは座標原点（$\vec{r}$ の始点）の選び方に依存する（図 17 左）
  - 速度（位置の変化分）、運動量、加速度、力などは座標原点に依存しない
  - $**$ のまわりの角運動量、$**$ を基準とした力のモーメント、のように指定する
- **回転の運動方程式**（$\vec{L}$ と $\vec{N}$ の座標原点は同じにとる）
  $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{158}$$
  力のモーメント $\vec{N}$ がかかる質点は角運動量 $\vec{L}$ が変化する
  運動方程式 $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ と似ている（ただし次元が異なることに注意）
  説明：
  $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
  ここで第 1 項は同じベクトルの外積 $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ なので消え、第 2 項で運動方程式 $\vec{F} = md\vec{v}/dt$ を使うと
  $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$
  つまり回転の運動方程式は $\vec{F} = md\vec{v}/dt$ から導かれる
- 回転の運動方程式の各成分
  $$\frac{dL_x}{dt} = N_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = N_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = N_z \tag{159}$$

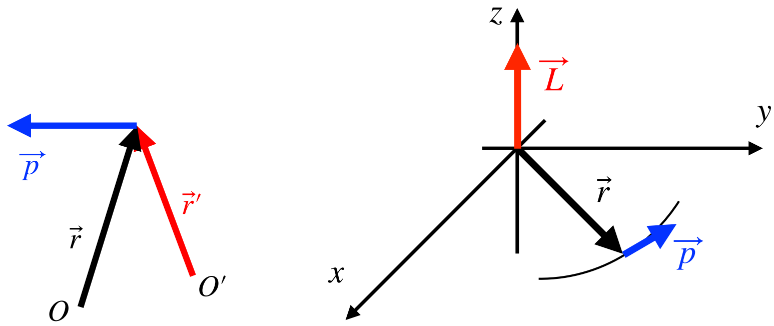


図 17: 左：座標原点の選び方と座標、運動量（$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \neq \vec{r}' \times \vec{p} = \vec{L}'$）。右：$x, y$ 平面内の等速円運動。

9.2 等速円運動

- 質量 m の質点の xy 平面内の半径 r の等速円運動（§4.3 参照）
- 常に $z = 0$ で $p_z = 0$ のとき（図 17 右）

$$L_x = yp_z - zp_y = y \cdot 0 - 0 \cdot p_y = 0 \tag{160}$$
$$L_y = zp_x - xp_z = 0 \cdot p_x - x \cdot 0 = 0 \tag{161}$$

よって運動方程式は z 成分のみ

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \tag{162}$$

- 回転の中心を座標原点にとった場合の等速円運動（$\theta(t) = \omega t + \theta_0$）

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta(t) & r\sin\theta(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{163}$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -mr\omega\sin\theta(t) & mr\omega\cos\theta(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{164}$$

このとき回転中心を基準とした角運動量の z 成分 L_z は

$$\begin{aligned} L_z &= xp_y - yp_x \\ &= r\cos\theta(t)(mr\omega\cos\theta(t)) - r\sin\theta(t)(-mr\omega\sin\theta(t)) \\ &= mr^2\omega\cos^2\theta(t) + mr^2\omega\sin^2\theta(t) \\ &= mr^2\omega(\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)) \\ &= mr^2\omega \end{aligned} \tag{165}$$

- 等速円運動の場合、半径 r と角速度 ω は時間変化しないので

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = 0 \tag{166}$$

つまり回転中心を基準とした力のモーメントは $N_z = 0$ であることがわかる

- 実際に、等速円運動の場合に質点にはたらく力は円の中心向きで $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ なので

  $$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (-m\omega^2\vec{r}) = -m\omega^2\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

  なので $N_z = 0$ であり、運動方程式 (162) が満たされている

- 質点に力のモーメントがはたらかないとき、質点は角速度を変えない（等速円運動）

9.3　慣性モーメント

- 質点に力のモーメントを加えるとどうなるか？

- 質量 m の質点の xy 平面内の半径 r の円運動（**等速とは限らない**が r は一定）

  $$\frac{d\omega}{dt} \neq 0 \tag{167}$$

- **慣性モーメント** I：角運動量と角速度の比例係数、次元 L^2M

  $$L_z = I\omega \tag{168}$$

  回転の運動方程式を用いると

  $$\frac{dL_z}{dt} = N_z = I\frac{d\omega}{dt} \tag{169}$$

  運動方程式 $md\vec{v}/dt = \vec{F}$ と似ている（ただし次元が異なることに注意）

- 質点に力のモーメントを加えると（$N_z \neq 0$）、角速度が変化する（$d\omega/dt \neq 0$）

  – I が同じとき、加える力のモーメントが大きい方が角速度が大きく変化する

  – 同じ力のモーメントを与えた場合、I が大きい方が角速度の変化 $d\omega/dt$ が小さい

  慣性モーメントは回転に対する “質量”（回転させにくさ）

- 半径 r の円運動の場合、式 (165) より $L_z = mr^2\omega$ なので、式 (168) より

  $$I = mr^2 \tag{170}$$

  質量、半径が大きい場合に慣性モーメントが大きい

9.4 中心力と角運動量保存

- **中心力**：力の方向が位置ベクトルと同じ（$\vec{F}$ が $\vec{r}$ に比例、向きは両方可能）で力の強さが原点からの距離 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のみで決まる
  式で表現（$f(r)$ は r の関数、$\vec{r}/r$ は $\vec{r}$ 方向の長さが 1 の単位ベクトル）

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

- 中心力の例
  - 原点においた質量 M の質点が、位置 $\vec{r}$ にある質量 m の質点におよぼす重力

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

  - 原点においた電荷 Q の質点が、位置 $\vec{r}$ にある電荷 q の質点におよぼすクーロン力

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

    $Qq < 0$ のとき引力（互いに引き合う）、$Qq > 0$ のとき斥力（互いに反発する）

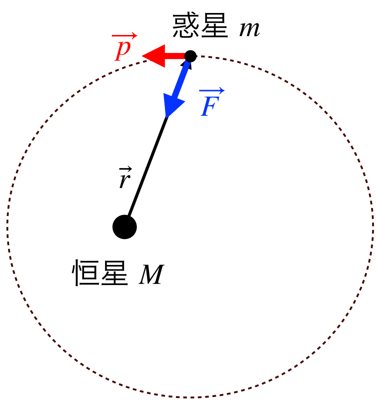
- 中心力のとき、力のモーメントは

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left[f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{f(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

  よって回転の運動方程式より、**中心力では角運動量が保存**する

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{0}$$

- 中心力による運動の例：等速円運動、惑星の運動（楕円軌道、図 18 左）、原子核による α 粒子の散乱（ラザフォード散乱、図 18 右）



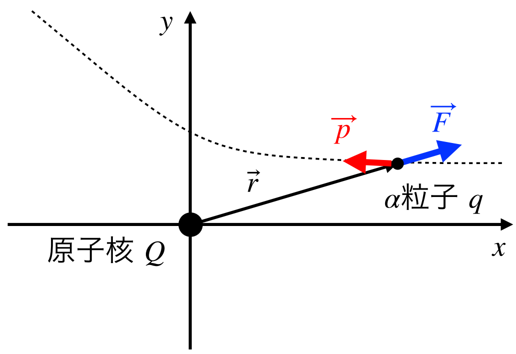


図 18: 中心力による運動の例。左：惑星の運動、右：ラザフォード散乱