7 質点系の運動

教科書 p.82-p.86

7.1 2質点系

- **質点系**：複数の質点からなる物理系
  例）2質点系：質点1（位置 $\vec{r}_1$、質量 m_1）と質点2（位置 $\vec{r}_2$、質量 m_2）の系
- **自由度**：系の状態を指定するために必要な変数の数
  例）1つの質点の1次元運動：1自由度（変数 x）
  1つの質点の3次元運動：3自由度（変数 x, y, z）
  2質点系の3次元運動は **6 自由度**（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$）
- **外力**と**内力**（図14）
  - 質点1にはたらく力：外力 $\vec{F}_1$ と質点2からの内力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$
  - 質点2にはたらく力：外力 $\vec{F}_2$ と質点1からの内力 $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$
  - 例）太陽の重力中の地球（質点1）と月（質点2）
    $\vec{F}_1$：太陽が地球におよぼす重力、$\vec{F}_{1\leftarrow 2}$：月が地球におよぼす重力
    $\vec{F}_2$：太陽が月におよぼす重力、$\vec{F}_{2\leftarrow 1}$：地球が月におよぼす重力

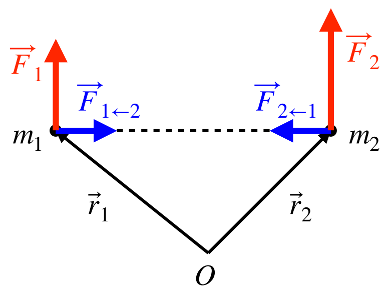

図 14: 2質点系にはたらく力の例。

- 外力か内力かは系の範囲によって決まる
  例）太陽も系に含める場合は、太陽が地球におよぼす重力 $\vec{F}_1$ は内力
- 運動方程式

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} \tag{108}$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{109}$$

各成分を数えると式 (108) に3本、式 (109) に3本、合計6本（自由度の数）の運動方程式

- 作用反作用の法則（運動の第 3 法則）

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0} \tag{110}$$

意味：内力の和はゼロ

7.2 重心座標と相対座標

- **全質量**（系全体の質量）：

$$M = m_1 + m_2 \tag{111}$$

- **重心**（質量中心）座標：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \tag{112}$$

2 つの位置ベクトルの間の線分を $m_2 : m_1$ の比で分割した点　（図 15）

- **相対座標**：質点 2 を基準とした質点 1 の座標（図 15）

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{113}$$

どちらを基準にするかで 2 通り考えられるが、1 と 2 の名前の付け替えで同じになる

- **換算質量**（相対座標の運動に関係する、詳しくは次回）：

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \tag{114}$$

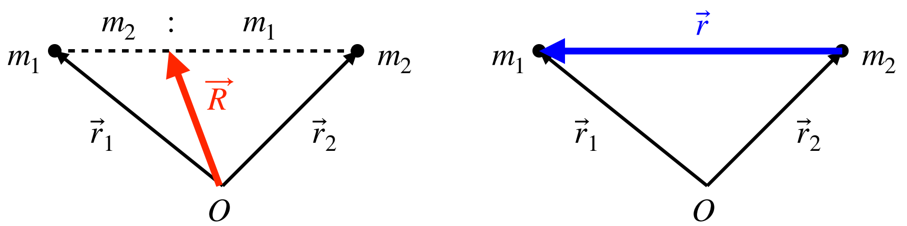

図 15: 重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$。

7.3 多数の質点の場合

- n 質点系：質点 1（位置 $\vec{r}_1$、質量 m_1）と質点 2（$\vec{r}_2$、m_2）と $\cdots$ と質点 n（$\vec{r}_n$、m_n）の系
- 自由度の数は $3n$（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_n, y_n, z_n$）

- 質点 1 にかかる力は $\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \cdots + \vec{F}_{1\leftarrow n}$

- 運動方程式

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \cdots + \vec{F}_{1\leftarrow n}, \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \cdots \tag{115}$$

  合計 $3n$ 本の運動方程式

- 重心座標：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{116}$$

- 全質量：

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_i m_i \tag{117}$$

  (和の上限、下限が明らかなときは省略することもある)
  重心座標は以下のようにも書ける

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{M} = \sum_i \frac{m_i}{M}\vec{r}_i \tag{118}$$

- 作用反作用の法則

$$\vec{F}_{i\leftarrow j} + \vec{F}_{j\leftarrow i} = \vec{0} \quad (i \neq j) \tag{119}$$

7.4 重心座標の運動方程式

- 2 質点系の重心座標の時間変化：重心座標と全質量の定義より

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{120}$$

  両辺を時間で 2 回微分すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \tag{121}$$

  運動方程式 (108)、(109) を代入すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1}) \tag{122}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{123}$$

  作用反作用の法則より、内力の和は $\vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0}$ なので、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{124}$$

  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ は外力の和、つまり系全体にかかる力なのでこれを全外力 $\vec{F}_{外}$ とする

$$\vec{F}_{外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{125}$$

- **重心座標の運動方程式**：

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{外}} \tag{126}$$

重心座標 $\vec{R}$ の運動は**質量 M の質点に全外力 $\vec{F}_{\text{外}}$ がかかった運動**と同じ

7.5 運動量と保存則

- 質点の**運動量**：速度に質量をかけたもの、次元 LMT^{-1}

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{127}$$

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{128}$$

力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$）、**運動量が保存**（時間に依存しない）

- 2 質点系：それぞれの質点の運動量

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} \tag{129}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{130}$$

- 系全体の運動量（全運動量）

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{131}$$

$$= (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)$$

$$= M\frac{d}{dt}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = M\frac{d\vec{R}}{dt} \tag{132}$$

運動方程式より

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{外}} \tag{133}$$

全運動量の時間変化が外力で与えられる

- 外力 $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{0}$ のとき

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{外}} = \vec{0} \tag{134}$$

$\Rightarrow$ 重心は**加速度がゼロ**の運動（等速直線運動）

- 全運動量：

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{外}} = \vec{0} \tag{135}$$

外力がない場合、**全運動量は保存**