

6 エネルギーの保存則

教科書 p.66-p.73

6.1 ポテンシャルエネルギー

- 力が保存力（質点の位置 \vec{r} のみで決まる力）の場合、 $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ と質点を動かすときの仕事

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 \quad (91)$$

は \vec{r}_A と \vec{r}_B の間の経路によらず、始点と終点の運動エネルギーの差を与える

- $\vec{r}_B \rightarrow \vec{r}_A$ と質点を動かした場合の仕事は $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ の仕事と大きさが等しく符号が逆

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 \\ &= - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 \right) \\ &= - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

- 終点と始点と同じ場合 ($\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_A$) の仕事は 0

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = 0$$

- ポテンシャルエネルギー**：位置 \vec{r} から **基準点** \vec{r}_0 まで質点を動かす際に **保存力** がする仕事

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad (92)$$

- 定積分の場合積分変数は何を使っても良いが、今の場合 **積分の範囲に変数 \vec{r}** が使われているので、別の変数（例えば \vec{s} ）を積分変数に使う必要がある（演習問題参照）
- 基準点 \vec{r}_0 から位置 \vec{r} まで質点を動かす際に保存力がする仕事の逆符号
- 基準点 $\vec{r} = \vec{r}_0$ ではポテンシャルエネルギーがゼロ

$$U(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (93)$$

- 基準点 \vec{r}_0 は自由に選べる：ポテンシャルエネルギーは定数の不定性がある座標原点にとる ($\vec{r}_0 = \vec{0}$) と簡単な場合が多い

- 1次元の場合

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F_x(s) ds \quad (94)$$

- 力はポテンシャルの x 微分で与えられる

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \left(\Leftrightarrow F_x(s) = -\frac{dU(s)}{ds} \right) \quad (95)$$

← 微分積分学の基本定理より

$$-\int_{x_0}^x F_x(s)ds = -\int_{x_0}^x \left(-\frac{dU(s)}{ds} \right) ds = U(x) - \underbrace{U(x_0)}_{=0} = U(x)$$

- 式 (95) 右辺：ポテンシャルエネルギー $U(x)$ の変化の逆符号
ポテンシャルエネルギーの高いところから低い方へ力がはたらく

6.2 ポテンシャルエネルギーの例

- 重力のポテンシャルエネルギー

- 質量 m の質点の鉛直方向の 1 次元運動（鉛直上向きに x 軸）
- 質点にはたらく力（ g は重力加速度）

$$F_x(x) = -mg$$

- 基準位置を $x = 0$ としたとき、位置 x のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int_0^x (-mg)ds = mg[s]_0^x = mgx \quad (96)$$

$x > 0$ のとき：ポテンシャルエネルギーは正

$x < 0$ のとき：ポテンシャルエネルギーは負

- 高い（ x が正で大きい）場所にある質点は大きなポテンシャルエネルギーを持つ
位置エネルギー
- $U(x)$ の傾きが一定：力の強さは一定

- ばねのポテンシャルエネルギー

- ばねにつながれた質点の 1 次元運動（ばねの向きに x 軸、重力や摩擦は考えない）
- 質点にはたらく力（ k はばね定数）

$$F_x(x) = -kx$$

- 基準位置を $x = 0$ （ばねの自然長）としたとき、位置 x のポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = -\int_0^x (-ks)ds = k \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x = \frac{kx^2}{2} \quad (97)$$

$x > 0$ でも $x < 0$ でもポテンシャルエネルギーは正

⇒ $x = 0$ が一番エネルギーが低い

- $U(x)$ の傾きが一定でない：力の強さ変位によって決まる
- $U(x)$ のグラフから力の向きが読み取れる

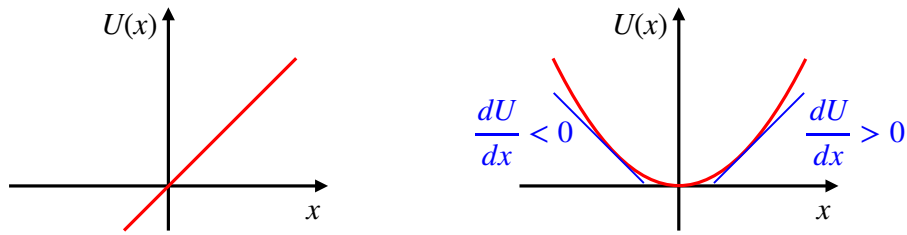


図 13: 左：重力のポテンシャルエネルギー。右：ばねのポテンシャルエネルギー。

6.3 力学的エネルギーの保存

- $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ と質点を動かすときの仕事

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 \quad (98)$$

運動エネルギーで表現できる

- 仕事は経路に依存しないので $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_B$ と動かすと

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーでも表現できる

- 両者が等しいので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \\ \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 + U(\vec{r}_A) \end{aligned} \quad (99)$$

左辺：位置 \vec{r}_B にいるときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和

右辺：位置 \vec{r}_A にいるときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和

- **力学的エネルギーの保存**

保存力の場合、質点の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は常に一定

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(\vec{r}) = (\text{一定}) \quad (100)$$

- 例) 重力中の1次元運動

ポテンシャルエネルギーは $U(x) = mgx$ なので

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = (\text{一定}) \quad (101)$$

6.4 非保存力がある場合

- 一般の場合、力は保存力と非保存力の和

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}_{\text{非}} \quad (102)$$

このとき $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ の仕事は (C は \vec{r}_A から \vec{r}_B へ向かう経路 C を指定)

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)} + \int_C \vec{F}_{\text{非}} \cdot d\vec{r}$$

- 運動エネルギーの変化は非保存力を含めた仕事に等しいので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) + \int_C \vec{F}_{\text{非}} \cdot d\vec{r} \\ \frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 + U(\vec{r}_A) + \int_C \vec{F}_{\text{非}} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (103)$$

- 非保存力の仕事は熱エネルギーなどに変化する
- 仕事をどのように効率よくエネルギーに変換するか? → 熱力学 (物理通論 II) へ

前半のまとめ

- 運動の法則はニュートンの運動方程式で表現される

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (104)$$

- 様々な物理現象がニュートンの運動方程式から導かれる

- 単振動する質点の運動

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) \quad (105)$$

- 仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (106)$$

- 力学的エネルギー保存

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(\vec{r}) = (\text{一定}) \quad (107)$$