

5 仕事とエネルギー

教科書 p.62-p.66

5.1 仕事

- 一定の力 \vec{F} がはたらいている質点が位置 \vec{r}_A から \vec{r}_B に動く (図 11 左)
- 変位ベクトル

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \quad (69)$$

$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (70)$$

- 複数の力がはたらくとき、**それぞれの力ごと**に仕事を考える
 \Rightarrow ある力 \vec{F} に対して、変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ が同じ方向とは限らない

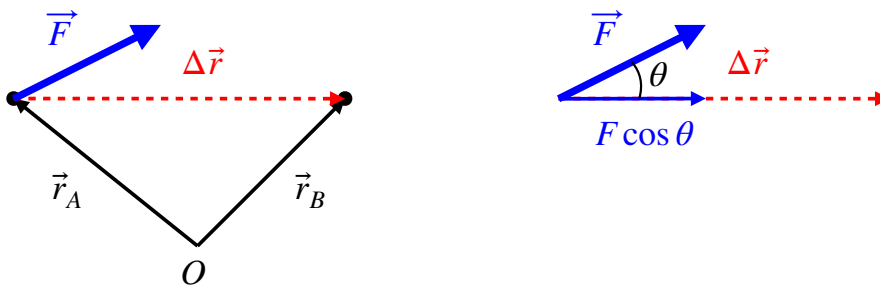


図 11: 左: 力 \vec{F} と変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ 。右: 力の $\Delta\vec{r}$ 方向成分 $F \cos \theta$ 。

- **仕事 W** : 力 \vec{F} と変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ の内積

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos \theta = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \quad (71)$$

θ は \vec{F} と $\Delta\vec{r}$ の間の角度: $F \cos \theta$ は \vec{F} の $\Delta\vec{r}$ 方向成分 (図 11 右)

- 力がはたらいているが質点が動かないとき ($\Delta\vec{r} = \vec{0}$): $W = 0$
 例) 床の上に静止している質点への重力の仕事
- 質点が動いているが力がはたらかないとき ($\vec{F} = \vec{0}$): $W = 0$
 例) 等速直線運動
- 力と反対方向に質点が動くとき ($\theta = \pi$, $\cos \theta = -1$): $W < 0$
 例) \vec{F} と反対方向に別の力がはたらいている場合
- 運動が 1 次元の場合: $\Delta\vec{r} = (\Delta x \ 0 \ 0)$

$$W = F_x \Delta x \quad (72)$$

F_x は \vec{F} の x 方向成分 (F_y , F_z は 0 とは限らない)

- 仕事の次元：力 × 距離

$$LMT^{-2} \times L = L^2MT^{-2} \quad (73)$$

SIでの単位はジュール $J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

5.2 力が一定でない場合

- 力が位置 \vec{r} によって変化する場合 (図 12 左)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (74)$$

3つの変数 x, y, z の関数

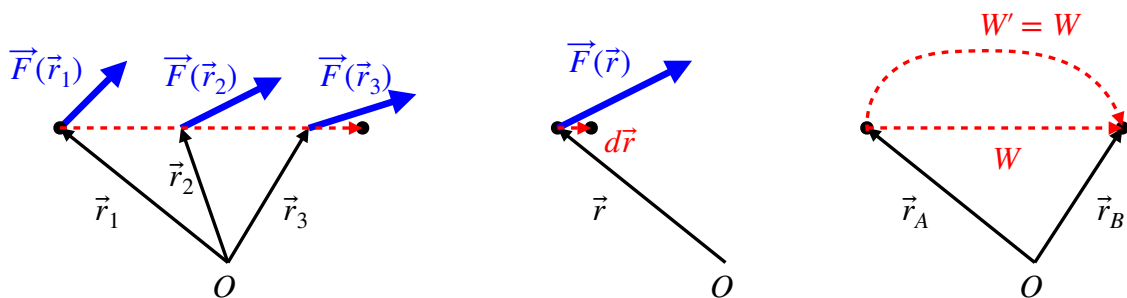


図 12: 左：位置 \vec{r} によって変化する力。中：微小変位 $d\vec{r}$ に対する仕事。右：異なる経路。

- **保存力**：式 (74) のように質点の位置 \vec{r} のみで決まる力
例) 重力、万有引力、バネの力
保存力でない例) 摩擦力、空気抵抗
- 位置 \vec{r} における微小な (長さが無限小) 変位 $d\vec{r}$ に対する仕事 (図 12 中)

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x(\vec{r})dx + F_y(\vec{r})dy + F_z(\vec{r})dz \quad (75)$$

変位 $d\vec{r}$ の間は力が $\vec{F}(\vec{r})$ で一定とみなせる

- 質点が位置 \vec{r}_A から \vec{r}_B に動く際の仕事
各 \vec{r} での微小仕事を足し上げる = 積分する

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (76)$$

右辺は線積分と呼ばれる (一般には経路を指定、この授業では詳しくは扱わない)
保存力の場合、線積分の値は \vec{r}_A と \vec{r}_B の間の経路によらない (図 12 右)

- 運動が 1 次元の場合：力 F_x は座標 x のみの関数 $F_x(x)$ (これは通常の積分)

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)dx \quad (77)$$

F_x は \vec{F} の x 方向成分 (F_y 、 F_z は 0 とは限らない)

5.3 運動エネルギー

- エネルギー：仕事をする能力

- **運動エネルギー** T ：

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (78)$$

- エネルギーの次元：質量 \times 速度²

$$M \times (LT^{-1})^2 = L^2MT^{-2} \quad (79)$$

仕事と同じ次元、SIでの単位は $J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

- 合力 $\vec{F}(\vec{r})$ がはたらいっている質量 m の質点が位置 \vec{r}_A から \vec{r}_B に動く
(ここでは**全ての力の合力**を考える点に注意)
- 位置 \vec{r}_A での速度を \vec{v}_A 、 \vec{r}_B での速度を \vec{v}_B とすると、以下が成り立つ：

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_A^2 = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (80)$$

左辺：質点の運動エネルギーの変化

右辺： F が質点にした仕事

質点の**運動エネルギーの変化**は**合力が質点に与えた仕事**に等しい

- 式(80)は**運動方程式から導出**される

- 位置 \vec{r}_A にいる時刻を t_A 、 \vec{r}_B にいる時刻を t_B とすると

$$\vec{v}_A = \vec{v}(t_A), \quad \vec{v}_B = \vec{v}(t_B) \quad (81)$$

$$\begin{pmatrix} v_{Ax} & v_{Ay} & v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t_A) & v_y(t_A) & v_z(t_A) \end{pmatrix} \quad (82)$$

- 運動方程式の x 成分：

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (83)$$

- 式(83)右辺に x 方向の速度 $v_x = dx/dt$ をかけて t について t_A から t_B まで積分

$$\int_{t_A}^{t_B} F_x v_x dt = \int_{t_A}^{t_B} F_x \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx \quad (84)$$

- 速度 $v_x(t)$ を2乗して時間 t で微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 &= \frac{d}{dv_x} v_x^2 \frac{dv_x}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[v_x(t)]^2 &= v_x \frac{dv_x}{dt} \end{aligned}$$

よって式 (83) 左辺に $v_x = dx/dt$ をかけて t について t_A から t_B まで積分すると

$$\int_{t_A}^{t_B} m v_x \frac{dv_x}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [v_x(t)]^2 dt \quad (85)$$

– 微分積分学の基本定理：

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (86)$$

のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] dx = F(b) - F(a) \quad (87)$$

に対し $x \leftarrow t$ 、 $a \leftarrow t_A$ 、 $b \leftarrow t_B$ 、 $F(x) \leftarrow (m/2)[v_x(t)]^2$ と代入すると

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [v_x(t)]^2 dt &= \frac{m}{2} [v_x(t_B)]^2 - \frac{m}{2} [v_x(t_A)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{Bx}^2 - \frac{1}{2} m v_{Ax}^2 \end{aligned} \quad (88)$$

– 運動方程式より式 (84) と (85) は等しいので、

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [v_x(t)]^2 dt = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx \quad (89)$$

$$\frac{1}{2} m v_{Bx}^2 - \frac{1}{2} m v_{Ax}^2 = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx \quad \leftarrow (88) \quad (90)$$

– y, z についても同様の式が成り立つので、3成分の両辺をそれぞれ足すと

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{1}{2} m v_{Bx}^2 - \frac{1}{2} m v_{Ax}^2 + \left(\frac{1}{2} m v_{By}^2 - \frac{1}{2} m v_{Ay}^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m v_{Bz}^2 - \frac{1}{2} m v_{Az}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m (v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_{Bz}^2) - \frac{1}{2} m (v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 + v_{Az}^2) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 \\ (\text{右辺}) &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

よって式 (80) が成り立つ