4　力と運動の例（振動、等速円運動）

教科書 p.19-p.22, p.52-p.56

4.1　単振動

- 水平な床の上でばねで壁につながれた質点（質量 m、図 8）
  ばねの方向に質点を動かした場合の運動（床との摩擦はなし）

- 座標（x, y, z 軸）：問題に応じて都合の良いように設定して良い
  ばねから見て質点の方向に x 軸、鉛直方向に y 軸、水平面内に z 軸をとる
  ばねが自然長の時の質点の位置を $\vec{r} = (0, 0, 0)$ とする

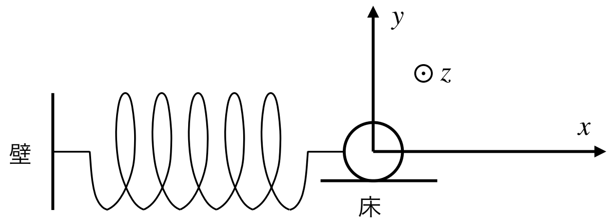

図 8: ばねで壁につながれた質点と座標軸。

- y 方向は重力と垂直抗力がつり合っている ⇒ 常に $y(t) = 0$ で静止（一般には等速直線運動）

- z 方向に力ははたらかない ⇒ 常に $z(t) = 0$ で静止（一般には等速直線運動）

- x 方向の力

$$F_x = -kx \tag{44}$$

  - $x = 0$ のとき（自然長）：$F_x = 0$、力がはたらかない
  - 力の強さは変位（原点からのずれ x）の大きさに比例
  - 比例係数 k：**バネ定数**（弾性体の一種）
  - 右辺の − 符号：力の向きは変位 x と逆向き（図 9）
    伸びているとき（$x > 0$）縮む向きの力（$F_x < 0$）
    縮んでいるとき（$x < 0$）伸びる向きの力（$F_x > 0$）

- x 方向の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{45}$$

関数 $x(t)$ とその微分 $d^2x(t)/dt^2$ を含む方程式：**微分方程式**
微分方程式を解く：方程式を満たす**関数 $x(t)$ を求める**

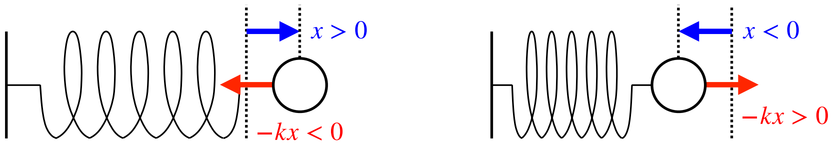

図 9: ばねの変位とはたらく力。

- **角振動数** ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{46}$$

とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{47}$$

これを**単振動の運動方程式**という

- 微分方程式の**解**（式 (47) を満たす関数 $x(t)$）

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0), \quad A, \theta_0\text{: 定数} \tag{48}$$

確認：

$$\frac{dx}{dt} = -A\sin(\omega t + \theta_0)\frac{d}{dt}(\omega t + \theta_0) = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0) \tag{49}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\omega A\sin(\omega t + \theta_0)\right) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x \tag{50}$$

式 (47) を満たす

- 速度：

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0) \tag{51}$$

- 定数 A：振動の**振幅**、θ_0：初期位相
  $t = 0$ の初速 $v(0)$ と初期位置 $x(0)$ で決まる

$$v(0) = -A\omega\sin\theta_0, \quad x(0) = A\cos\theta_0 \tag{52}$$

4.2 2 次元極座標

- xy 平面内での質点の運動
- z 方向に力ははたらかない $\Rightarrow$ 常に $z(t) = 0$ で静止（一般には等速直線運動）
- 以下ベクトルの z 成分を省略し $\vec{r} = (x, y)$ と x, y の 2 成分で表す

- 2 次元**極座標**：座標 (x, y) を原点からの距離 $r = |\vec{r}|$ と x 軸からの角度 θ で表す（図 10 左）

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{53}$$

- 角度 θ は無次元
  - 度で測る：$0° \leq \theta < 360°$
  - ラジアンで測る：$0 \leq \theta < 2\pi$

- 角度をラジアンで測った場合、弧の長さ s は

$$s = r\theta \tag{54}$$

確認：半径 r、角度 2π の弧の長さ（円周）は $2\pi r$

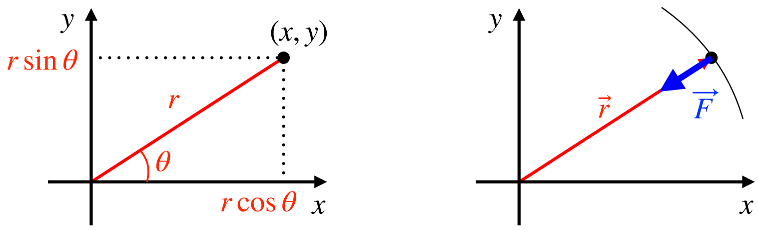

図 10: 左：2 次元直交座標と極座標の関係。右：等速円運動の位置ベクトル $\vec{r}$ と向心力 $\vec{F}$。

4.3 等速円運動

- xy 平面内で半径 r の円周上を運動する質点
  → 質点の位置を角度を一つの変数 θ で表す
  r は時間に依存しない（$dr/dt = 0$）

- 運動する質点は時間とともに角度が変化する
  → 角度 θ は時間の関数

$$\theta(t) \tag{55}$$

- **角速度** ω：角度の時間変化、次元 T^{-1}

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{56}$$

- **等速円運動**：角速度が時間によらず一定 $\omega(t) = \omega$
  このとき角度の時間依存性は

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \quad (\text{定数}) \tag{57}$$

θ_0：$t = 0$ の角度 $\theta(0) = \theta_0$

- 質点の位置座標

$$x(t) = r\cos[\theta(t)] = r\cos(\omega t + \theta_0) \tag{58}$$
$$y(t) = r\sin[\theta(t)] = r\sin(\omega t + \theta_0) \tag{59}$$

- 角速度 ω を角振動数 ω、半径 r を振幅 A と読み替えれば $x(t)$ は単振動の解と同じ形

- 速度ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[r\cos(\omega t + \theta_0)] = -r\omega\sin(\omega t + \theta_0) \tag{60}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[r\sin(\omega t + \theta_0)] = r\omega\cos(\omega t + \theta_0) \tag{61}$$

速度の大きさ：t によらず**一定**（等速）

$$\begin{aligned} v = |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t + \theta_0) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t + \theta_0)} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2[\sin^2(\omega t + \theta_0) + \cos^2(\omega t + \theta_0)]} \\ &= r\omega \end{aligned} \tag{62}$$

- 加速度ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[-r\omega\sin(\omega t + \theta_0)] = -r\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x \tag{63}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[r\omega\cos(\omega t + \theta_0)] = -r\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y \tag{64}$$

ベクトルで書くと

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} \tag{65}$$

- 運動方程式より、等速円運動する質点にはたらく力は

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \tag{66}$$

  - 力の向きは位置ベクトルの逆向き：**円の中心向き**（図 10 右）
  - 力の強さは一定 $|\vec{F}| = m\omega^2 r$：向心力

- 位置ベクトルに対する微分方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\vec{r} \tag{67}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \tag{68}$$

x と y に対する独立な単振動の運動方程式
$\rightarrow$ 解が式 (48) と同じ関数になる理由