3　運動の法則（力、運動方程式）

教科書 p.24-p.31

3.1　運動の法則

- 運動の法則：質点にはたらく力と質点の運動の関係
- 合力：複数の力 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots\}$ のベクトル和（図 4 左）

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots \tag{27}$$

複数の力 $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots\}$ と、合力 $\vec{F}$ は、質点に対し同じ効果を与える

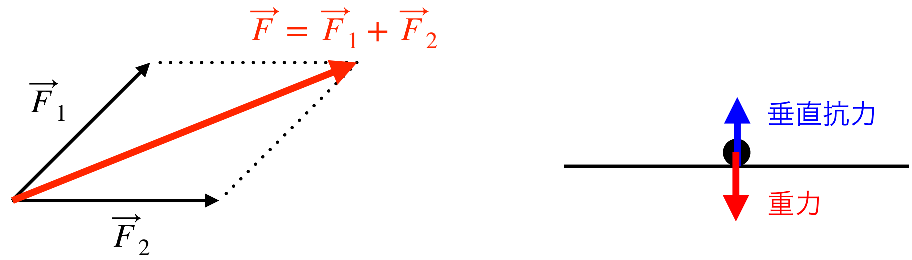

図 4: 左：$\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ の合力 $\vec{F}$。右：床に置かれた質点にはたらく重力と垂直抗力。

- 第 1 法則（**慣性の法則**）
質点に力がはたらかないとき、質点は速度を変えない（**等速直線運動**）
  - 慣性：速度（運動の状態）を変えない性質
  - 力がはたらかない $\Leftrightarrow$ 合力が $\vec{F} = \vec{0}$（力がつりあった状態）
  - 力がはたらかない例：無重力空間にある質点
  - 合力が $\vec{F} = \vec{0}$ の例：床に置かれた質点（図 4 右、重力と垂直抗力がつりあう）
  - 「静止」は速度 $\vec{v} = \vec{0}$ の等速直線運動
- 第 2 法則（**運動の法則**）
質点に力がはたらくとき、力の向きに**加速度**が生じる
加速度の大きさは力の大きさに比例し、質量に反比例する
  - 加速度が質量に反比例 $\rightarrow$ 質量が大きいほうが慣性が大きい
  - 加速度は速度の時間変化 $\rightarrow$ 質点の速度を変化させるには力が必要
  - 静止した質点に力を加える：力の方向に運動を始める（速度を持つ）、図 5 左上
  - 速度と同じ向きに力を加える：速度が増える、図 5 右上

– 速度と逆向きに力を加える：速度が減る、図 5 左下

– 速度と垂直に力を加える：速度の方向が変わる、図 5 右下
速度の大きさを変えずに向きだけ変わる運動も加速度運動

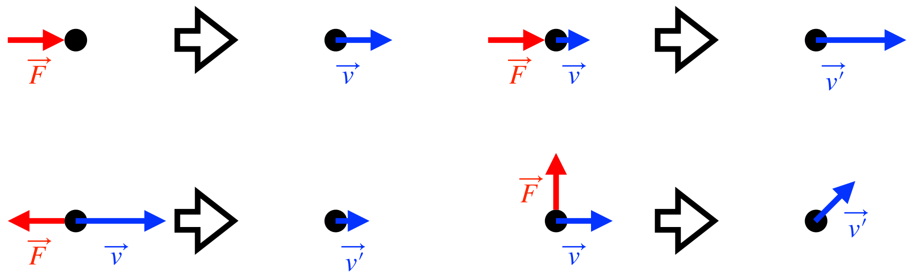

図 5: 質点の加速。左上：静止した質点に力を加えた場合。右上：速度と同じ向きに力を加えた場合。左下：速度と逆向きに力を加えた場合。右下：速度と垂直に力を加えた場合。

- 第 3 法則（**作用反作用の法則**）
2 つの質点間にはたらく力は互いに逆向きで大きさが等しい
  – 複数の質点の運動に対する法則
  – 例）床に置かれた質点の「質点が床を押す力」と「床が質点を支える垂直抗力」
  注）力のつりあい（1 つの質点にはたらく複数の力）とは異なる

- 第 1 法則と第 2 法則の数式による表現：ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{28}$$

m は質点の質量、$\vec{r}$ は質点の位置ベクトル、$\vec{F}$ は質点にはたらく力（合力）

- 第 3 法則の数式による表現：

$$\vec{F}_{B\leftarrow A} = -\vec{F}_{A\leftarrow B} \tag{29}$$

$\vec{F}_{A\leftarrow B}$ は質点 A が質点 B から受ける力、$\vec{F}_{B\leftarrow A}$ は質点 B が質点 A にから受ける力

3.2 運動方程式

- **ニュートンの運動方程式**

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{30}$$

- 速度 $\vec{v}$ を用いた表式：

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{31}$$

- 加速度 $\vec{a}$ を用いた表式

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{32}$$

- $\vec{F} = \vec{0}$ のとき

  – 速度の表式より

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \tag{33}$$

  速度の時間変化が $\vec{0} \rightarrow$ 質点は速度を変えない（第 1 法則）

  – 等速直線運動：$\vec{v}$ が時間に対して一定の（時間変化しない）運動

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \tag{34}$$

  で v_x, v_y, v_z の時間微分は 0、よって

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} & \frac{dv_y}{dt} & \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{35}$$

- $\vec{F} \neq \vec{0}$ のとき

  – 加速度の表式より

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{36}$$

  加速度 $\vec{a}$ の向きは力 $\vec{F}$ の向き（第 2 法則）

  – 両辺の絶対値

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} \tag{37}$$

  加速度の大きさ $|\vec{a}|$ は力の大きさ $|\vec{F}|$ に比例し、質量 m に反比例する（第 2 法則）

- 運動方程式の各成分

$$m\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \tag{38}$$

  3 つの 1 次元の運動方程式と等価

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \tag{39}$$

- 1 次元の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{40}$$

  x、F_x はスカラー量だが、**符号が向き**を表している（図 6）

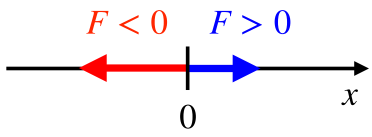

図 6: 1 次元運動の力の向きと符号。

3.3 万有引力

- **万有引力（重力）**：質点の間にはたらく引力（引き寄せ合う力）
  反発し合う力を斥力という
- 万有引力の大きさは質量の積に比例し、距離の 2 乗に反比例する
- 数式による表現（力の大きさ）

$$F = G\frac{m_A m_B}{r^2} \tag{41}$$

質点 A（質量 m_A）と質点 B（質量 m_B）が距離 r 離れて位置している場合

- **万有引力定数**

$$G \simeq 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2} \tag{42}$$

物理定数（人間ではなく自然が決めた値）であり、キリのいい値にはならない
注）$\simeq$ は「だいたい等しい」の意味で、$\sim$、$\approx$ なども同じ意味で使う（$\fallingdotseq$ は普通使わない）

- 力の向き：$\vec{F}_{A\leftarrow B}$ は質点 A と質点 B を結ぶ直線上で、A から B に向かう方向
- ベクトルによる表記（図 7）

$$\vec{F}_{A\leftarrow B} = G\frac{m_A m_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2}\frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} \tag{43}$$

注）$\vec{r}/|\vec{r}|$ は $\vec{r}$ の方向を向いた単位ベクトル（長さが 1 のベクトル）

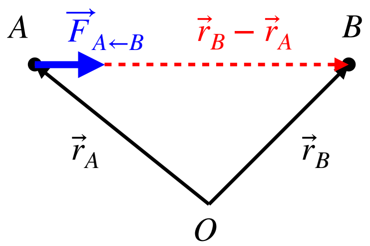

図 7: 質点 A と B の間にはたらく万有引力 $\vec{F}_{A\leftarrow B}$。