# 2　数学的な基礎

**教科書 p.11-18**

## 2.1　1 次元の運動と微分

- **質点**：質量を持つが大きさを持たないもの
  通常の物体の大きさが小さい極限（理想化）と考える
  大きさを持っている物体（剛体）も、重心運動は質点の運動として記述される

- 1 次元の運動：質点が 1 つの方向（前後、左右など）しか動けない場合
  $\rightarrow$ 質点の位置を一つの変数 $x$（次元 $L$）で表す

- 運動する質点は時間とともに位置が変化する
  $\rightarrow$ $x$ は時間 $t$ の関数（図 2 左）

$$x(t) \tag{2}$$

  変数（今の場合時間 $t$）を省略して書く場合がある

- **速度**：位置の時間変化（傾き）、次元 $LT^{-1}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

  速度も時間の関数（図 2 中）

- **加速度**：速度の時間変化（傾き）、次元 $LT^{-2}$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{4}$$

  加速度も一般には時間の関数（図 2 右、ただしこの図では $a$ は定数）

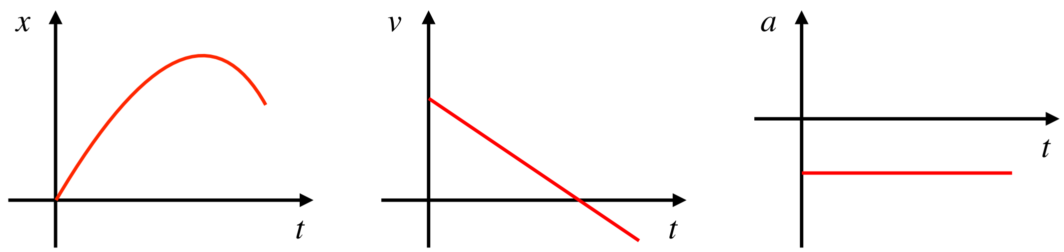


図 2: 時間 $t$ の関数としての位置 $x$（左）、速度 $v$（中）、加速度 $a$（右）の模式図。

- **微分**：関数 $f(x)$ の変化量

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

別の書き方

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad df(x)/dx, \quad \cdots \tag{6}$$

ただし分子の $d$ は常に微分する関数（今の場合 $f$）より左に書く
参考）積分の $dx$ は非積分関数より前に書いても良い

$$\int f(x)dx = \int dx\ f(x) \tag{7}$$

- 関数の積の微分：それぞれの関数の微分の和

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{8}$$

例）$f(x) = x^2$、$g(x) = \sin x$ の場合

$$\frac{d}{dx}[x^2 \sin x] = \frac{d}{dx}[x^2]\sin x + x^2\frac{d}{dx}[\sin x] = 2x\sin x + x^2\cos x$$

- 合成関数の微分：中身の微分をかける

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{dF(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx} \tag{9}$$

例）$F(g) = \exp\{g\} = e^g$、$g(x) = ax^2$ の場合

$$\frac{d}{dx}[\exp\{ax^2\}] = \frac{dF(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dg}\exp\{g\}\frac{d}{dx}(ax^2) = \exp\{g\} \times 2ax = 2ax\exp\{ax^2\}$$

## 2.2　ベクトル

- **ベクトル**：$x, y, z$ の 3 つの成分を持っている（図 3 左、ベクトルは矢印で表記）

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{10}$$

この授業では行列を扱わないので縦書きでも横書きでも良い
$x, y, z$ 成分を $1, 2, 3$ と表記する場合もある

- ゼロベクトル：すべての成分が 0 のベクトル

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

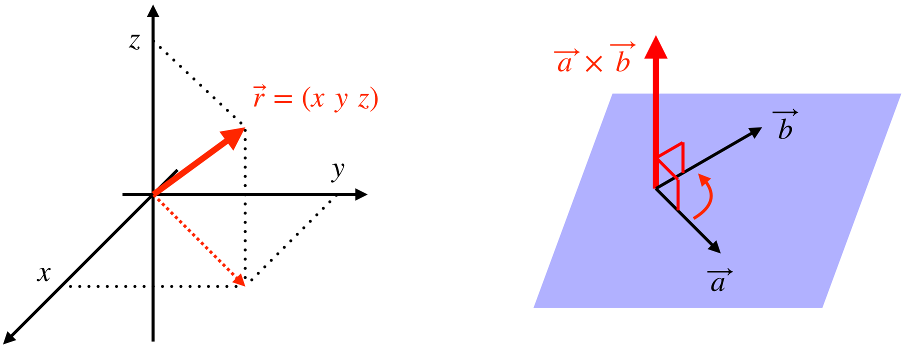


図 3: 左：位置ベクトル $\vec{r}$。右：ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積。

- **スカラー**：1 成分のみの数

$$m, \quad x, \quad \cdots \tag{12}$$

ベクトルの一つの成分もスカラー

- ベクトルとスカラーは足し引きできない
  → 等式の両辺で**ベクトル/スカラーは常に一致**
  例）

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{ゼロベクトル}} \tag{13}$$

- **内積**（スカラー積、結果がスカラー）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{14}$$

$(\vec{a}, \vec{b})$ と表記することもある

- **外積**（ベクトル積、結果がベクトル、図 3 右）

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{x\text{ 成分}} & \underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{y\text{ 成分}} & \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{z\text{ 成分}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ のベクトルは $\vec{a}, \vec{b}$ 両方と直交し、向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじが進む方向

- ベクトルの 2 乗：自分自身との内積

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{16}$$

- ベクトルの大きさ：

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{17}$$

- 内積と外積のベクトルの大きさ：
  $\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の角度として

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \tag{18}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta \tag{19}$$

  - $\theta=\pi/2=90^\circ$（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交）のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$、$|\vec{a}\times\vec{b}|=ab$
  - $\theta=0=0^\circ$（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向き）のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab$、$|\vec{a}\times\vec{b}|=0$、$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

- 内積と外積の性質：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \tag{20}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \tag{21}$$

- ベクトルの微分：各成分の微分

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix}\frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt}\end{pmatrix} \tag{22}$$

## 2.3　3次元の運動

- 3次元の運動：質点が3つの方向（前後、左右、上下など）に動ける場合
  $\rightarrow$ 質点の位置を3つの変数 $x, y, z$（それぞれ次元 $L$）で表す

- 運動する質点は時間とともに位置が変化する
  $\rightarrow$ $\vec{r}=(x\ y\ z)$ の各成分は時間 $t$ の関数

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x(t) & y(t) & z(t)\end{pmatrix} \tag{23}$$

  1次元の位置を3つ組み合わせたもの
  $\vec{x}$ と書く場合もある

- **速度**：位置の時間変化（傾き)、各成分の次元 $LT^{-1}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix}\frac{dx(t)}{dt} & \frac{dy(t)}{dt} & \frac{dz(t)}{dt}\end{pmatrix} \tag{24}$$

  1次元の速度を3つ組み合わせたもの

- **加速度**：速度の時間変化（傾き)、各成分の次元 $LT^{-2}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix}\frac{dv_x(t)}{dt} & \frac{dv_y(t)}{dt} & \frac{dv_z(t)}{dt}\end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix}\frac{d^2x(t)}{dt^2} & \frac{d^2y(t)}{dt^2} & \frac{d^2z(t)}{dt^2}\end{pmatrix} \tag{26}$$

  1次元の加速度を3つ組み合わせたもの