12　波の性質

教科書 p.130-p.142

12.1　波動

- 波動：媒質の振動が空間的に伝わる（伝播する）現象
- **媒質**：振動を伝えるもの、空間的に連続分布している
  波が伝播しても媒質自体は移動しない
  例）海水（海の波)、空気（音)、電磁場（光）
- **変位**：媒質の基準位置からのずれ、次元 L
  - **横波**：波の進行方向と変位が垂直（図 26 上）
  - **縦波**：波の進行方向と変位が並行（図 26 下）

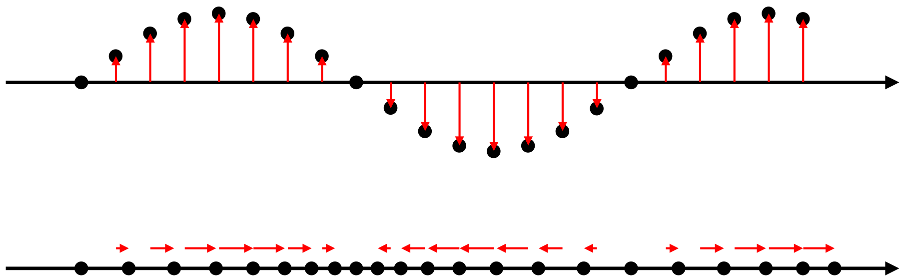

図 26: 縦波と横波の模式図。上：横波、下：縦波。黒丸は媒質を表す。

- 時刻 t に位置 x にある媒質の変位（変位が 1 次元的な場合）

$$y(t, x) = A\sin(\omega t - kx) \tag{204}$$

$\omega t - kx$：位相、無次元
ω：**角振動数**（振動数 f、周期 T と $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ の関係)、次元 T^{-1}
k：**波数**（波長 λ と $k = 2\pi/\lambda$ の関係)、次元 L^{-1}
A：振幅、次元 L

- 変位 $y(t, x)$ は t と x の 2 変数に依存する関数
- $x = x_0$ に固定すると（同じ位置の媒質に注目して変位の時間変化をみる）

$$y(t, x_0) = A\sin(\omega t + \text{定数}) \tag{205}$$

振幅 A、角振動数 ω の単振動

- $t=t_0$ に固定すると（時間を止めて各点の変位の形を見る）

$$y(t_0,x)=A\sin(\text{定数}-kx) \tag{206}$$

波の空間的な形が三角関数

- 波の**伝播速度** v：周期 T の間に波長 λ 進むので

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k} \tag{207}$$

12.2 偏微分

- 2 変数関数 $f(x,y)$：変数 x と y 両方を与えると関数の値が 1 つ決まる
  x,y 平面の各点に値 $f(x,y)$ がある（図 27 左参照）

- **偏微分**：多変数関数での微分（通常の 1 変数関数の微分は常微分）
  ある点 x,y での $f(x,y)$ の x 方向の傾きと y 方向の傾き

- 偏微分の定義（固定する変数を明記する場合もある）

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta,y)-f(x,y)}{\Delta}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y \tag{208}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x,y+\Delta)-f(x,y)}{\Delta}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x \tag{209}$$

- 使い方：偏微分する変数以外は定数とみなして微分（A,B,C は定数）

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2y+Bx+C)=\underbrace{Ay}_{\text{定数}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+B=2Axy+B$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2y+Bx+C)=\underbrace{Ax^2}_{\text{定数}}\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(Bx+C)}_{\text{定数}}=Ax^2$$

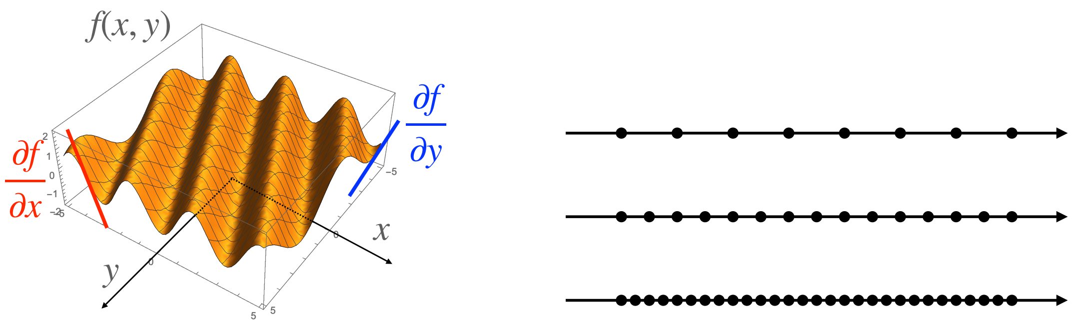

図 27: 左：2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x-2y)$。右：媒質の連続極限の模式図。

12.3 波動方程式

- **波動方程式**：変位 $y(x,t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{210}$$

v：波の伝播速度

- 隣接する媒質がバネ（弾性体）でつながれ、間の距離が無限小の極限（連続極限）をとる（図 27 右） ← バネの運動方程式から導出される

- 式 (204) は波動方程式 (210) の解
確認）左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= A\frac{\partial}{\partial x}\sin(\omega t - kx) \\
&= A\frac{\partial}{\partial x}(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx) \\
&= -kA\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} \\
&= -kA\frac{\partial}{\partial x}\cos(\omega t - kx) \\
&= -kA(-k)[-\sin(\omega t - kx)] \\
&= -k^2 A\sin(\omega t - kx) \\
&= -k^2 y
\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \omega A\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\sin(\omega t - kx) = -\omega^2 y \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} y \\
&= -k^2 y \quad \leftarrow (207) \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}$$

12.4 重ね合わせの原理

- **重ね合わせの原理**：斉次線形微分方程式の 2 つの解の線形結合が解になること
斉次：定数項がない
線形：未知関数の 1 乗の項しかない（2 乗、3 乗、ルート、三角関数などがない）

- 運動方程式の解の重ね合わせ
  - 単振動の運動方程式
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{211}$$
  - 2 つの解 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が式 (211) を満たすとき、以下の線形結合も式 (211) の解
$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t), \quad A, B \text{ 定数} \tag{212}$$
  - 確認：
$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{d^2}{dt^2}(Ax_1 + Bx_2) \\
&= Am\frac{d^2x_1}{dt^2} + Bm\frac{d^2x_2}{dt^2} \\
&= A(-kx_1) + B(-kx_2) \quad \leftarrow (x_1, x_2 \text{ に対する運動方程式}) \\
&= -k(Ax_1 + Bx_2) \\
&= -kx
\end{aligned}$$
- 波動方程式の解の重ね合わせ
  - 波動方程式
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{213}$$
  - 2 つの解 $y_1(t,x)$ と $y_2(t,x)$ が式 (213) を満たすとき、以下の線形結合も式 (213) の解
$$y(t,x) = Ay_1(t,x) + By_2(t,x), \quad A, B \text{ 定数} \tag{214}$$
  - 確認：
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ay_1 + By_2) \\
&= A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\
&= A\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + B\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \quad \leftarrow (y_1, y_2 \text{ に対する波動方程式}) \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Ay_1 + By_2) \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{aligned}$$
- 波動の重ね合わせ：2 つの波動を重ね合わせて新しい波動が作れる
  一般の波動：多数の三角関数の重ね合わせ（フーリエ級数展開、フーリエ変換）