11　弾性体

教科書 p.115-p.118

11.1　弾性体とは

- **弾性体**：力を加えると変形する物体
  例）バネ、ゴム、固体など
- **弾性**：変形度が小さい場合に、力を取り除くと元の形に戻る性質 $\rightarrow$ 復元力がはたらく
- 1 次元の弾性体（バネ）のフックの法則：復元力 F は変位 x に比例（x が小さいとき）

$$F = -kx \tag{188}$$

  バネ定数 k はバネごとに異なる（材質固有の性質）
- 加える力をより強くしていくと（図 23 左）
  - 比例限界：フックの法則が成り立たなくなる
  - 弾性限界：力を取り除いても元に戻らない（バネが伸びきる塑性変形）
  - 破壊点：弾性体が破壊される点（バネがちぎれる）
- 3 次元の弾性体（ゴムの塊）：様々な変形と復元力、対応関係は（ただし符号と次元に注意）
  - 変位 $\rightarrow$ ひずみ
  - 復元力 $\rightarrow$ 応力
  - バネ定数 $\rightarrow$ 弾性定数
- 以下では等方（どの方向も同じ）で一様（どの部分も同じ）な弾性体を考える

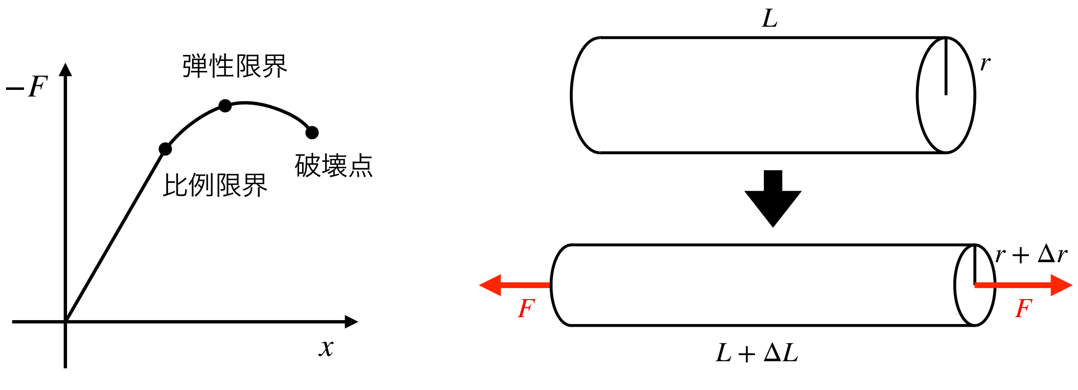

図 23: 左：弾性体の変位 x と復元力 F の関係の模式図。右：円柱型の弾性体の変形。

11.2　ひずみと応力

- 円柱型の弾性体を力 F で長さ方向に引っ張る（図 23 右）
  - 変形前：長さ L、半径 r
  - 変形後：長さ $L+\Delta L$、半径 $r+\Delta r$
  - 変位：ΔL、Δr、どちらも微小、$\Delta L > 0$、通常は $\Delta r < 0$

- **微小量**：$\delta \ll 1$（δ は 1 より十分小さい）
  具体的に $\delta = 10^{-3} = 0.001$ とすると、
  $$\delta^0 = 1, \quad \delta^1 = 10^{-3} = 0.001, \quad \delta^2 = 10^{-6} = 0.00001, \quad \cdots \tag{189}$$
  となるので δ^{n+1} は δ^n より十分小さい
  「微小量の 1 次まで考慮する」という場合、2 次以上を
  $$\mathcal{O}\big(\delta^2\big) = a\delta^2 + b\delta^3 + \cdots \tag{190}$$
  という記号で表し、これを無視する
  異なるべき乗を足し合わせるので微小量は無次元

- **ひずみ**：単位長さあたりの変位、次元は無次元
  $$(\text{ひずみ}) = \frac{\Delta L}{L} \tag{191}$$
  理由：変位 ΔL は弾性体の長さ L に比例するため（c.f. バネを 2 つ直列につなぐ）

- **応力**：弾性体の単位面積あたりにかかる力、次元は $L^{-1}MT^{-2}$（圧力と同じ）
  $$(\text{応力}) = \frac{F}{A}, \quad A = \pi r^2 \tag{192}$$
  符号は外向きが正（弾性体にはたらく力なので復元力と反対向き）

- フックの法則：ひずみが微小なとき、応力はひずみに比例
  $$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \tag{193}$$
  比例係数は**ヤング率** E、次元は $L^{-1}MT^{-2}$

- **弾性定数**：ヤング率などの応力とひずみの比例係数

- **ポアソン比** σ：応力に垂直な方向（半径方向）のひずみと応力方向（長さ方向）のひずみの比
  $$-\frac{\Delta r}{r} = \sigma\frac{\Delta L}{L} \tag{194}$$
  通常は $\Delta L > 0$、$\Delta r < 0$（長さが伸びたら幅が縮む）なので $\sigma > 0$
  稀に $\sigma < 0$（長さが伸びたら幅が広がる）の物質も存在

- 硬い弾性体：E 大、σ 小
  やわらかい弾性体：E 小、σ 大
  体積一定の変形の場合は $\sigma = 1/2$

11.3 圧縮変形とずれ変形

- 圧縮変形：弾性体の表面全体に圧力 p（内向きが正）をかけて小さくする
  - 変形前：体積 V
  - 変形後：体積 $V+\Delta V$（体積変化 ΔV は微小で符号は負）
- **体積弾性率** K、次元は $L^{-1}MT^{-2}$（圧力と同じ）

$$p = -K\frac{\Delta V}{V} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p \tag{195}$$

  $1/K$ が大きい（小さい）：同じ圧力でより大きく（小さく）圧縮される
  $\rightarrow 1/K$ は圧縮率と呼ばれる

- ずれ変形：断面が正方形の弾性体の側面に平行に応力 τ をかける
  - 変形前：断面の正方形の角度が $\pi/2$
  - 変形後：断面のひし形角度が $\pi/2+\Delta\theta$ と $\pi/2-\Delta\theta$、体積は変えない
- **ずれ弾性率** μ、次元は $L^{-1}MT^{-2}$（圧力と同じ）

$$\tau = \mu\Delta\theta \tag{196}$$

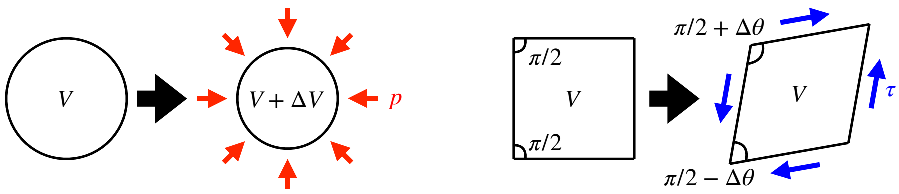

図 24: 左：圧縮変形、右：ずれ変形。

11.4 弾性定数の関係

- 弾性定数の間の関係式

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{197}$$

  体積一定の変形はポアソン比が $\sigma \rightarrow 1/2$、このとき $K \rightarrow \infty$ で圧縮できない（非圧縮）

- 式 (197) の説明：
  - 一辺 L の立方体の全ての面に圧力 p、各辺が $L+\Delta L$（ΔL の符号は負）に変化（図 25 左）

– 体積弾性率：$V = L^3$ で体積変化は $\Delta V = (L+\Delta L)^3 - L^3$ なので、$\delta = \Delta L/L$ とすると

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(L+\Delta L)^3 - L^3}{L^3} = (1+\delta)^3 - 1 = \left[1 + 3\delta + \mathcal{O}(\delta^2)\right] - 1 = 3\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

であり各面の圧力は p なので、δ の 2 次以上を無視すると

$$p = -K\frac{\Delta V}{V} = -3K\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{1}{3K}p \tag{198}$$

– ヤング率とポアソン比：x, y, z 方向の応力を別々に考える

$$\underbrace{\frac{\Delta L}{L} = \delta}_{x\,\text{方向のひずみ}} = \underbrace{\delta_x}_{x\,\text{方向の応力の寄与}} + \underbrace{\delta_y}_{y\,\text{方向}} + \underbrace{\delta_z}_{z\,\text{方向}} \tag{199}$$

x 方向の応力で短くなり（$\delta_x < 0$）、y, z 方向からの応力で長くなる（$\delta_y > 0, \delta_z > 0$）

– x 方向の応力は $-p$（符号は外向きが正）で、x 方向の長さが縮むため

$$-p = E\delta_x \quad \Rightarrow \quad \delta_x = -\frac{1}{E}p \tag{200}$$

– y 方向の応力による y 方向のひずみは上と同じく $-p/E$、このとき x 方向は応力に垂直な方向のひずみなので、ポアソン比を使って

$$-\delta_y = \sigma\left(-\frac{1}{E}p\right) \quad \Rightarrow \quad \delta_y = \frac{\sigma}{E}p \tag{201}$$

同様に z 方向の応力による x 方向のひずみは $\delta_z = \sigma p/E$（図 25 右）

– 以上より

$$\delta = -\frac{1}{E}p + \frac{\sigma}{E}p + \frac{\sigma}{E}p = -\frac{1}{E}(1-2\sigma)p \tag{202}$$

式 (198) と比較して

$$-\frac{1}{3K} = -\frac{1}{E}(1-2\sigma) \quad \Rightarrow \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{203}$$

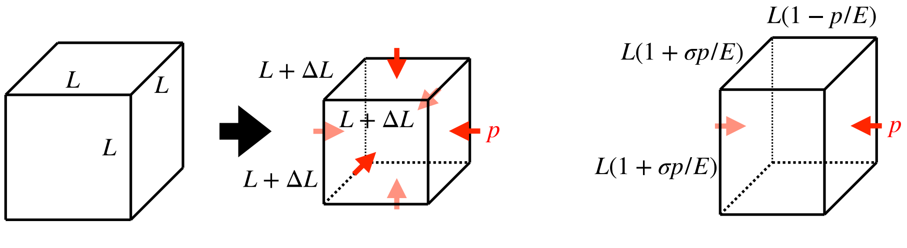

図 25: 1 辺 L の立方体に圧力 p をかけたときの変形。左：全ての面に圧力をかけた場合。右：一つの方向のみに圧力をかけた場合。