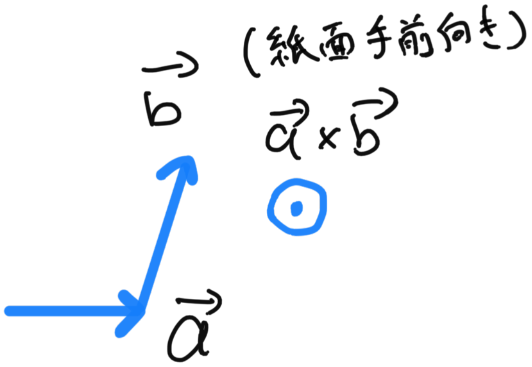
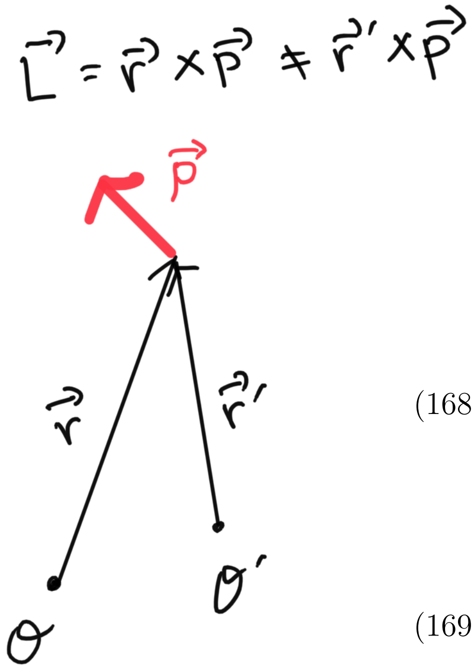
9　回転運動と角運動量



教科書 p.77-p.81

9.1　回転運動の法則



- 今日の目標：**回転運動**の物理法則を理解する
  剛体（大きさがある物体）の回転運動の準備

- 位置 $\vec{r}$ にある質量 m の質点の運動

- **角運動量**：回転に対する “運動量”
  位置座標 $\vec{r}$ と運動量 $\vec{p}$ の外積、次元 L^2MT^{-1}

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{168}$$

- **力のモーメント**（トルク）：回転に対する “力”
  位置座標 $\vec{r}$ と質点にかかる力 $\vec{F}$ の外積、次元 L^2MT^{-2}

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{169}$$

- 角運動量、力のモーメントは座標原点（$\vec{r}$ の始点）に依存する
  - 速度、加速度は座標原点に依存しない
  - $**$ のまわりの角運動量、$**$ を基準とした力のモーメント、のように指定する

- **回転の運動方程式**（$\vec{L}$ と $\vec{N}$ の座標原点は同じにとる）

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{170}$$

力のモーメント $\vec{N}$ がかかる質点は角運動量 $\vec{L}$ が変化する
運動方程式 $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ と似ている（ただし次元が異なることに注意）
証明：

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\
&= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}
\end{aligned}$$

ここで第１項は同じベクトルの外積 $\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}$ なので消え、第２項で運動方程式 $\vec{F}=md\vec{v}/dt$ を使うと

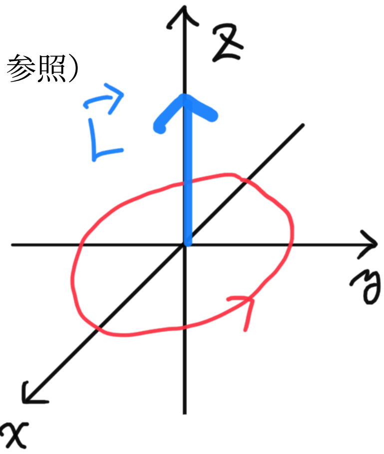
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{N}$$

つまり回転の運動方程式は $\vec{F}=md\vec{v}/dt$ から導かれる

- 回転の運動方程式の各成分

$$\frac{dL_x}{dt}=N_x,\quad \frac{dL_y}{dt}=N_y,\quad \frac{dL_z}{dt}=N_z \tag{171}$$

9.2 等速円運動



- 質量 m の質点の xy 平面内の半径 r の等速円運動（§4.3 参照）
- 常に $z=0$ で $p_z=0$ のとき

$$L_x=yp_z-zp_y=y\cdot 0-0\cdot p_y=0 \tag{172}$$
$$L_y=zp_x-xp_z=0\cdot p_x-x\cdot 0=0 \tag{173}$$

よって運動方程式は z 成分のみ

$$\frac{dL_z}{dt}=N_z \tag{174}$$

- 回転の中心を座標原点にとった場合の等速円運動（$\theta(t)=\omega t+\theta_0$）

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} r\cos\theta(t) & r\sin\theta(t) & 0\end{pmatrix} \tag{175}$$
$$\vec{p}=\begin{pmatrix} -mr\omega\sin\theta(t) & mr\omega\cos\theta(t) & 0\end{pmatrix} \tag{176}$$

このとき回転中心を基準とした角運動量の z 成分 L_z は

$$\begin{aligned}L_z&=xp_y-yp_x\\&=r\cos\theta(t)(mr\omega\cos\theta(t))-r\sin\theta(t)(-mr\omega\sin\theta(t))\\&=mr^2\omega\cos^2\theta(t)+mr^2\omega\sin^2\theta(t)\\&=mr^2\omega(\cos^2\theta(t)+\sin^2\theta(t))\\&=mr^2\omega\end{aligned} \tag{177}$$

- 等速円運動の場合、半径 r と角速度 ω は時間変化しないので

$$\frac{dL_z}{dt}=\frac{d(mr^2\omega)}{dt}=0 \tag{178}$$

つまり回転中心を基準とした力のモーメントは $N_z=0$ であることがわかる

- 実際に、等速円運動の場合に質点にはたらく力は円の中心向きで $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ なので

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times (-m\omega^2\vec{r}) \\ &= -m\omega^2\vec{r} \times \vec{r} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

なので $N_z = 0$ であり、運動方程式 (174) が満たされている

- 質点に力のモーメントがはたらかないとき、質点は角速度を変えない（等速円運動）

9.3 慣性モーメント

- 質点に力のモーメントを加えるとどうなるか？
- 質量 m の質点の xy 平面内の半径 r の円運動（等速とは限らないが r は一定）

$$\frac{d\omega}{dt} \neq 0 \tag{179}$$

- **慣性モーメント** I：角運動量と角速度の比例係数、次元 L^2M

$$L_z = I\omega \tag{180}$$

回転の運動方程式を用いると

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z = I\frac{d\omega}{dt} \tag{181}$$

運動方程式 $md\vec{v}/dt = \vec{F}$ と似ている（ただし次元が異なることに注意）

- 質点に力のモーメントを加えると（$N_z \neq 0$）、角速度が変化する（$d\omega/dt \neq 0$）
  - I が同じとき、加える力のモーメントが大きい方が角速度が大きく変化する
  - 同じ力のモーメントを与えた場合、I が大きい方が角速度の変化 $d\omega/dt$ が小さい

慣性モーメントは回転に対する “質量”

- 半径 r の等速円運動の場合、式 (177) より

$$L_z = mr^2\omega \tag{182}$$

なので

$$I = mr^2 \tag{183}$$

質量、半径が大きい場合に慣性モーメントが大きい

9.4 中心力と角運動量保存

- **中心力**：
  - 力の方向が位置ベクトルと同じ（$\vec{F}$ が $\vec{r}$ に比例、向きは両方可能）
  - 力の強さが原点からの距離 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のみで決まる

  式で表現（$f(r)$ は r の関数）

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

- 中心力の例
  - 原点においた質量 M の質点が、位置 $\vec{r}$ にある質量 m の質点におよぼす重力

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

  - 原点においた電荷 Q の質点が、位置 $\vec{r}$ にある電荷 q の質点におよぼすクーロン力

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

    $Qq < 0$ のとき引力（互いに引き合う）、$Qq > 0$ のとき斥力（互いに反発する）

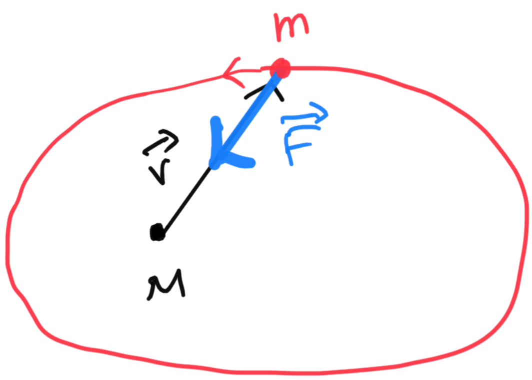
- 中心力のとき、力のモーメントは

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left[f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{f(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

  このとき回転の運動方程式より

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{0}$$

  つまり**中心力では角運動量が保存**する



- 中心力による運動
  - 等速円運動
  - 惑星の運動（楕円軌道）
  - 原子核による α 粒子の散乱（ラザフォード散乱）