8　重心の運動

教科書 p.86-p.89

8.1　相対座標の運動方程式

- 2 質点系の運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{148}$$

- 相対座標の時間微分

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \\ m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= m_2 m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \end{aligned}$$

運動方程式を代入すると

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_2(\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}) - m_1(\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1}) \tag{149}$$

内力 $\vec{F}_{内}$ を

$$\vec{F}_{内} = \vec{F}_{1\leftarrow 2} \tag{150}$$

と定義すると、作用反作用の法則より

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = -\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{内} \tag{151}$$

なので

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= m_2(\vec{F}_1 + \vec{F}_{内}) - m_1(\vec{F}_2 - \vec{F}_{内}) \\ m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= (m_1 + m_2)\vec{F}_{内} + m_2 \vec{F}_1 - m_1 \vec{F}_2 \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}_{内} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{F}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{F}_2 \end{aligned}$$

全質量 M と換算質量 μ の定義を用いると、相対座標の運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{内} + \frac{m_2}{M}\vec{F}_1 - \frac{m_1}{M}\vec{F}_2 \tag{152}$$

- 外力がない場合（$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{0}$）

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{内} \tag{153}$$

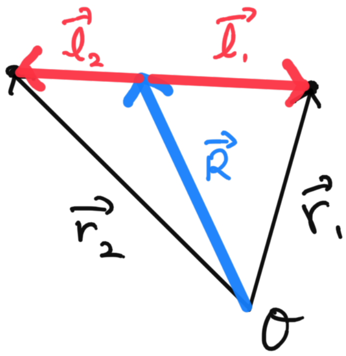
相対座標 $\vec{r}$ の運動は**質量 μ の質点に内力 $\vec{F}_{内}$ がかかった運動**と同じ
このとき重心座標の運動方程式と全運動量 $\vec{P}$ は

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \tag{154}$$

- 外力のない 2 体問題は、換算質量と相対座標による 1 体問題と等価
（重心と相対に分解する意義）

- 外力のない n 体問題は、$n-1$ 個の質量と座標による $n-1$ 体問題と等価

8.2 運動エネルギーの分解



- 重心速度 $\vec{V}$ と相対速度 $\vec{v}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{155}$$

- 重心を基準とした位置座標 $\vec{\ell}_i$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{\ell}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{\ell}_2 \tag{156}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\vec{\ell}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{R} \\
&= \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_2}{M}\vec{r}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\vec{\ell}_2 &= \vec{r}_2 - \vec{R} \\
&= \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1\vec{r}_2 + m_2\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2} \\
&= -\frac{m_1}{M}\vec{r}
\end{aligned}$$

より、

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{157}$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{158}$$

位置座標 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ は重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$ で表現できる

- 速度の重心と相対への分離

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{m_2}{M}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{v} \tag{159}$$
$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{v} \tag{160}$$

- ２質点系の全運動エネルギー T

$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} \tag{161}$$

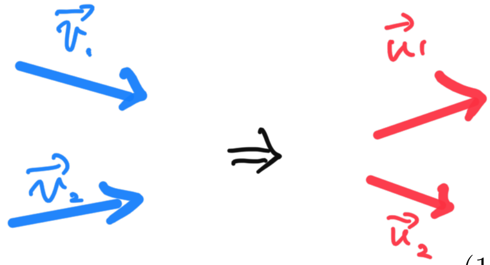
重心速度と相対速度で表現すると（公式 $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$ を使う）

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\left(\vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{v}\right)^2 \\
&= \frac{m_1}{2}\left(\vec{V}^2 + 2\frac{m_2}{M}\vec{v}\cdot\vec{V} + \frac{m_2^2}{M^2}\vec{v}^{\,2}\right) + \frac{m_2}{2}\left(\vec{V}^2 - 2\frac{m_1}{M}\vec{v}\cdot\vec{V} + \frac{m_1^2}{M^2}\vec{v}^{\,2}\right) \\
&= \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)\vec{V}^2 + \left(\frac{m_1}{2}2\frac{m_2}{M} + \frac{m_2}{2}\left(-2\frac{m_1}{M}\right)\right)\vec{v}\cdot\vec{V} + \left(\frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{2}\frac{m_1^2}{M^2}\right)\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_1^2m_2}{M^2}\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1+m_2)}{M^2}\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2}
\end{aligned}$$

全運動エネルギーは重心運動と相対運動のエネルギーの和で表現できる

8.3 弾性衝突と保存則

- 外力なしで２つの物体が衝突する現象、衝突前の速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$、衝突後の速度 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$
- **弾性衝突**：衝突の前後で力学的エネルギーが保存する場合
  衝突前と衝突後は同じ２つの物体
- 弾性衝突でない例：衝突時にエネルギーが失われる（物体が変形する、火花が出る、など）場合や、衝突の前後で状態が変化する（物体が割れる）場合



- エネルギー保存（弾性衝突の場合）

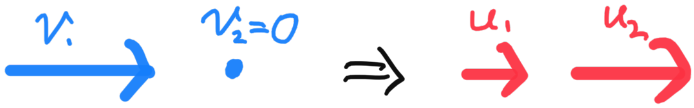
$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^{\,2} \tag{162}$$

ポテンシャルエネルギーは 0：外力は仕事をせず、内力の仕事は 1 と 2 で符号が反対

- 運動量保存

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \tag{163}$$

- 例） 1 次元運動（速度はスカラー、正負が向きを表す）
  - 同じ質量の質点の衝突（$m_1 = m_2 = m$）、最初 2 が静止（$v_2 = 0$）
  - 運動量保存より



$$\begin{aligned} mv_1 &= mu_1 + mu_2 \\ v_1 &= u_1 + u_2 \\ u_2 &= v_1 - u_1 \end{aligned} \tag{164}$$

  - エネルギー保存より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 &= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 \\ v_1^2 &= u_1^2 + u_2^2 \\ v_1^2 &= u_1^2 + (v_1 - u_1)^2 \quad \text{(運動量保存 (164) を用いて } u_2 \text{ を消去)} \\ v_1^2 &= u_1^2 + v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2 \\ 0 &= 2u_1^2 - 2v_1u_1 \\ 0 &= (u_1 - v_1)u_1 \end{aligned}$$

これより、衝突後の質点 1 の速度は（$AB = 0$ のとき、$A = 0$ または $B = 0$）

$$u_1 = v_1 \text{ または } 0 \tag{165}$$

式 (164) を用いると u_2 が計算でき

$$(u_1, u_2) = (v_1, 0) \text{ または } (0, v_1) \tag{166}$$

  - 解 $(v_1, 0)$ は衝突前後で速度が変化していないので、衝突が起きなかった場合に対応する。よって衝突が起きた場合の衝突後の速度は

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1 \tag{167}$$

質点 1 は静止し、質点 2 が衝突前の質点 1 と同じ速度で動き出す運動