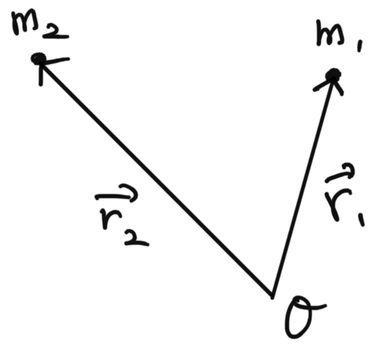
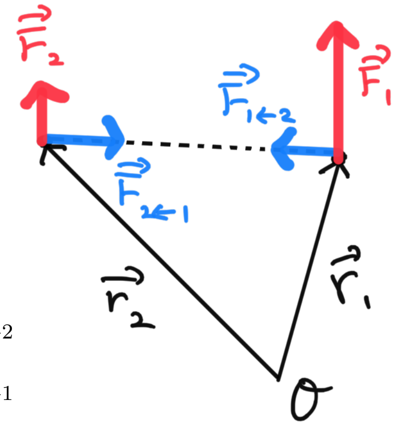


7　質点系の運動

教科書 p.83-p.86

7.1　2 質点系

- **質点系**：複数の質点からなる物理系
- 2 質点系：質点 1（位置 $\vec{r}_1$、質量 m_1）と質点 2（位置 $\vec{r}_2$、質量 m_2）の系
- **自由度**：系の状態を指定するために必要な変数の数
  例）1 つの質点の 1 次元運動：1 自由度（変数 x）
  　　1 つの質点の 3 次元運動：3 自由度（変数 x, y, z）



- 2 質点系は **6 自由度**（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$）
- **外力**と**内力**
  - 質点 1 にはたらく力：外力 $\vec{F}_1$ と質点 2 からの内力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$
  - 質点 2 にはたらく力：外力 $\vec{F}_2$ と質点 1 からの内力 $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$
  - 例）太陽の重力中の地球（質点 1）と月（質点 2）
    $\vec{F}_1$：太陽が地球におよぼす重力、$\vec{F}_{1\leftarrow 2}$：月が地球を引き寄せる万有引力
    $\vec{F}_2$：太陽が月におよぼす重力、$\vec{F}_{2\leftarrow 1}$：地球が月を引き寄せる万有引力
- 外力か内力かは系の範囲によって決まる
  例）太陽も系に含めれば $\vec{F}_1 = \vec{F}_{E\leftarrow S}$ は内力
- 運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} \tag{114}$$
$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{115}$$

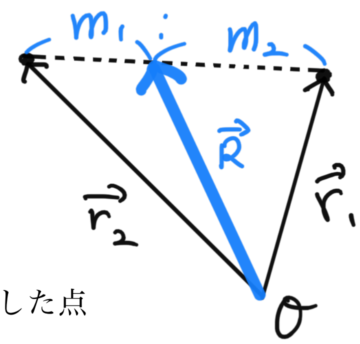
式 (114) に 3 つ、式 (115) に 3 つ、合計の 6 つの運動方程式（自由度の数と同じ）

- 作用反作用の法則（運動の第 3 法則）

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{116}$$
$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0} \tag{117}$$

意味：内力の和はゼロ

7.2　重心座標と相対座標



- **重心**（質量中心）座標：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{118}$$

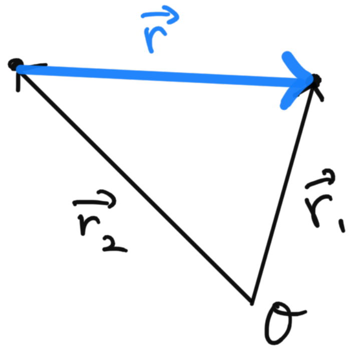
　2つの位置ベクトルの間の線分を $m_2 : m_1$ の比で分割した点

- **全質量**（系全体の質量）：

$$M = m_1 + m_2 \tag{119}$$

重心座標は以下のようにも書ける

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \tag{120}$$



- **相対座標**：質点2を基準とした質点1の座標

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{121}$$

どちらを基準にするかで2通り考えられるが、1と2の名前の付け替えで同じになる

- **換算質量**：

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \tag{122}$$

7.3　多数の質点の場合

- n 質点系：質点1（位置 $\vec{r}_1$、質量 m_1）と質点2（$\vec{r}_2$、m_2）と $\cdots$ と質点 n（$\vec{r}_n$、m_n）の系
- 自由度の数は $3n$（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_n, y_n, z_n$）
- 質点1にかかる力は $\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \cdots + \vec{F}_{1\leftarrow n}$
- 運動方程式

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \cdots + \vec{F}_{1\leftarrow n} \tag{123}$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \cdots \tag{124}$$

合計の $3n$ の運動方程式

- 重心座標：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{125}$$

- 全質量：

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_i m_i \tag{126}$$

(和の上限、下限が明らかなときは省略することもある)
重心座標は以下のようにも書ける

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{M} = \sum_i \frac{m_i}{M}\vec{r}_i \tag{127}$$

- 作用反作用の法則

$$\vec{F}_{i\leftarrow j} + \vec{F}_{j\leftarrow i} = \vec{0} \quad (i \neq j) \tag{128}$$

7.4 重心座標の運動方程式

- 2 質点系の重心座標の時間変化：重心座標と全質量の定義より

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{129}$$

両辺を時間で 2 回微分すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \tag{130}$$

運動方程式 (114)、(115) を代入すると

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\leftarrow 2}) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\leftarrow 1}) \tag{131}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{132}$$

作用反作用の法則より、内力の和は $\vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \vec{0}$ なので、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{133}$$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ は外力の和、つまり系全体にかかる力なのでこれを全外力 $\vec{F}_{外}$ とする

$$\vec{F}_{外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{134}$$

- **重心座標の運動方程式**：

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} \tag{135}$$

重心座標 $\vec{R}$ の運動は**質量 M の質点に全外力 $\vec{F}_{外}$ がかかった運動**と同じ

7.5 運動量と保存則

- 質点の**運動量**：速度に質量をかけたもの、次元 MLT^{-1}

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{136}$$

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{137}$$

力がはたらかないとき（$\vec{F} = \vec{0}$)、**運動量が保存**（時間に依存しない）

- 2 質点系：それぞれの質点の運動量

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} \tag{138}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{139}$$

- 系全体の運動量（全運動量）

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{140}$$

$$= m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} \tag{141}$$

$$= (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) \tag{142}$$

$$= M\frac{d}{dt}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{143}$$

$$= M\frac{d\vec{R}}{dt} \tag{144}$$

運動方程式より

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} \tag{145}$$

全運動量の時間変化が外力で与えられる

- 外力 $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{0}$ のとき

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{外} = \vec{0} \tag{146}$$

$\Rightarrow$ 重心は**加速度がゼロ**の運動（等速直線運動）

- 全運動量：

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{外} = \vec{0} \tag{147}$$

外力がない場合、**全運動量は保存**